

Correction du Sujet de Maths (Biologie et Géologie) :
Session 2002

Exercice 1

1) Pour tout $t \geq 0$, on a $cht \geq \frac{e^t}{2}$.

Ce qui donne que : $\frac{1}{(cht)^{n+1}} \leq \frac{2^{n+1}}{e^{(n+1)t}}$: intégrable au voisinage de $+\infty$.

2) • En posant $s = e^t$, on a : $a_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{cht} = \int_1^{+\infty} \frac{2}{s^2 + 1} ds = \frac{\pi}{2}$.

$$\bullet a_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(cht)^2} = \left[\frac{cht}{cht} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

3) Puisque pour tout $t \geq 0$, $\frac{1}{cht} \leq 1$, alors $a_{n+1} \leq a_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) a) Il est clair que $cht \leq e^t$.

De plus en étudiant la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(t) = cht - 1 - \frac{t^2}{2}$,

on montre que $g(t) \leq 0$, pour tout $t \geq 0$. Par suite $1 + \frac{t^2}{2} \leq cht$.

(On peut aussi utiliser la formule de Taylor de la fonction cht).

b) En utilisant a) on a pour tout $t \geq 0$: $\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{n+1} \leq (cht)^{n+1} \leq e^{(n+1)t}$.

De plus d'après la formule du Binôme de Newton, on a :

$$\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \frac{t^2}{2}.$$

Ce qui donne le résultat.

c) En intégrant les inégalités de la question précédente, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt \leq a_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + (n+1) \frac{t^2}{2}}.$$

D'autre part, on a : $\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{n+1}$.

Et en posant $s = \sqrt{\frac{n+1}{2}} t$, on obtient que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + (n+1) \frac{t^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}.$$

Ainsi on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}$.

d) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, on en déduit

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

5) a) En intégrant par parties, on obtient que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(cht)^{n+3}} = \left[\frac{sht}{(cht)^{n+2}} \right]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} \frac{(sht)^2}{(cht)^{n+3}} dt.$$

Ceci donne que $a_{n+2} = (n+1)a_n - (n+1)a_{n+2}$. D'où $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n$.

b) Si $n = 2m$, on montre par itération que :

$$a_{2m} = \frac{2m-1}{2m} a_{2m-2} = \dots = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} a_0 = \frac{(2m)!}{2^{2m+1} (m!)^2} \pi.$$

Si $n = 2m + 1$, on montre de même par itération que :

$$a_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} a_{2m-1} = \dots = \frac{2^{2m} (m!)^2}{(2m+1)!} a_1 = \frac{2^{2m} (m!)^2}{(2m+1)!}.$$

6) a) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, alors d'après la règle de Cauchy, le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, est $R = 1$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n \geq \frac{1}{n+1}$ et comme la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.

D'autre part, en utilisant les inégalités de 4)c) il est clair que la suite $(a_n)_n$ décroît vers 0. Donc la série alternée $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

7) a) Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, pour $x \in]-1, 1[$, alors on a :

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = a_1 + \sum_{n \geq 0} ((n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n) x^{n+1}.$$

Comme $a_1 = 1$, et $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n$, alors f est bien solution de

$$\begin{cases} (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1, & \text{si } |x| < 1, \\ f(0) = a_0. \end{cases}$$

b) Puisque f vérifie l'équation différentielle suivante

$$(*) \begin{cases} f'(x) - \frac{x}{(1-x^2)} f(x) = \frac{1}{(1-x^2)}, & \text{si } |x| < 1, \\ f(0) = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{alors } f(x) &= \exp\left(\int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt\right) \left[\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{1}{1-t^2} \exp\left(-\int_0^t \frac{s}{1-s^2} ds\right) dt \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{\pi}{2} + \text{Arcsin } x \right]. \end{aligned}$$

(On pourra vérifier directement que la fonction $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{\pi}{2} + \text{Arcsin } x \right]$ définie sur $] -1, 1[$ vérifie (*). Ce qui donne le résultat d'après l'unicité).

8) a) On a pour tout $x \in] -1, 1[$, $h(x) = \frac{\text{Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ce qui donne que $\int_0^x h(t) dt = \frac{1}{2} (\text{Arcsin } x)^2$, pour $x \in] -1, 1[$.

b) En utilisant la question précédente, on a pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$(\text{Arcsin } x)^2 = 2 \int_0^x h(t) dt = 2 \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}.$$

D'où d'après l'expression de a_n de la question 5)b), on obtient que :

$$(\text{Arcsin } x)^2 = \sum_{n \geq 1} \frac{2^{2n-1} ((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in] -1, 1[.$$

Exercice 2

1) On a $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\lambda(x) dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 1$.

D'où φ_λ est une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

b) • $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_\lambda(x) dx = \lambda \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx$.

En intégrant par parties, on a :

$$E(X) = \left[-xe^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

• $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}$.

A l'aide d'une intégration par parties, on a :

$$\lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

D'où $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

(On peut aussi utiliser $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$).

c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $F(t) = P(X < t) = \int_{-\infty}^t \varphi_\lambda(x) dx$.

Ce qui donne que

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = F(n + \theta) - F(n) = e^{-\lambda n} (1 - e^{-\lambda \theta})$.

Comme $e^{-\lambda} < 1$, alors la série géométrique $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge et sa somme est

$$S = \frac{1 - e^{-\lambda \theta}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

3) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(Y = n) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda n} (1 - e^{-\lambda}).$$

$$\bullet E(Y) = \sum_{n \geq 0} n P(Y = n) = (1 - e^{-\lambda}) \sum_{n \geq 1} n e^{-\lambda n} = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

4) a) Les égalités sont triviales.

b) Puisque X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

$$P(U < t) = (P(X_1 < t))^2 = (F(t))^2.$$

D'où en utilisant 1)c), on obtient que :

$$P(U < t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ (1 - e^{-\lambda t})^2, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

D'autre part on a de même : $P(V \geq t) = (P(X_1 \geq t))^2 = (1 - F(t))^2$.

Ce qui donne que:

$$P(V \geq t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < 0 \\ e^{-2\lambda t}, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

c) • La densité de la variable aléatoire U est donnée par :

$$u(t) = \frac{d}{dt} (P(U < t)) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 2\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}), & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

- La densité de la variable aléatoire V est donnée par :

$$v(t) = \frac{d}{dt}(1 - P(V \geq t)) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 2\lambda e^{-2\lambda t}, & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Exercice 3

- 1) On a $\det A = 0$, donc f n'est pas bijective.
-

2) • $\text{Ker } f = \text{Vect}(1, 1, -1)$.

- Comme $(f(e_1), f(e_2))$ forme un système libre de \mathbb{R}^3 et $\dim \text{Im } f = 2$, alors

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}((0, -1, 1); (2, 5, -4)).$$

- 3) Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$P_A(X) = \det(A - XI) = -X(X - 1)(X - 2).$$

Alors les valeurs propres de A sont 0, 1 et 2.

D'autre part, en remarquant que les valeurs propres de A sont deux à deux distinctes, on déduit que A est diagonalisable.

- 4) On prend $B' = (u_1, u_2, u_3)$, avec :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5) La matrice de passage de B à B' est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ De plus } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Puisque A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où } A^n = PD^nP^{-1}, \text{ avec } D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2^n & 1 + 2^{n+1} & 1 + 2^n \\ 2^n & -2^{n+1} & -2^n \end{pmatrix}.$$

7)a) On a $u(t) = x(t) - 2y(t) - 2z(t)$

$$v(t) = y(t) + z(t)$$

$$w(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t).$$

b) En utilisant les égalités suivantes

$$x'(t) = 2y(t) + 2z(t)$$

$$y'(t) = -2x(t) + 5y(t) + 3z(t)$$

$$z'(t) = 2x(t) - 4y(t) - 2z(t).$$

On obtient que :

$$u'(t) = x'(t) - 2y'(t) - 2z'(t) = 0$$

$$v'(t) = y'(t) + z'(t) = y(t) + z(t) = v(t)$$

$$w'(t) = -x'(t) + 2y'(t) + z'(t) = -2x(t) + 4y(t) + 2z(t) \stackrel{(*)}{=} 2w(t).$$

De plus, comme $x(0) = z(0) = 0$ et $y(0) = 1$, alors $u(0) = 2$, $v(0) = -1$ et $w(0) = -2$.

c) Il est clair que $u(t) = 2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

D'autre part, comme v est solution de l'équation différentielle :

$v'(t) - v(t) = 0$, avec $v(0) = -1$, alors $v(t) = -e^{-t}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

De même, on a : $w(t) = -2e^{-2t}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ce qui donne, en utilisant que $X(t) = PU(t)$, l'expression des fonctions x, y, z :

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 2e^t \\ y(t) = 2 - e^t - 2e^{2t} \\ z(t) = -2 + 2e^{2t}. \end{cases}$$