V.

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session de Juin 2003

Concours en Biologie Géologie
Corrigé de l'Epreuve de Mathématiques

EXERCICE

1. (a) On a : $X_{n+1} = AX_n$ où

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

   (b) On a par récurrence, $X_n = A^n X_0$

2. Les valeurs propres de A sont -1, 1 et 2.
3. La matrice A est diagonalisable sur
4. (a) On a :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (b) et

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. (a) Par récurrence

   (b) On a :

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} + 2 & (-1)^n - 1 & (-1)^n - 1 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2 - 2^n & (-1)^n - 1 & (-1)^n - 1 + 2^n \end{bmatrix}$$

   (c) On obtient $u_n = 2((-1)^n - 1)$, $v_n = 2(-1)^n - 2^n$ et $w_n = 2^n + 2((-1)^n - 1)$

PROBLÈME

Soient X et Y deux variables aléatoires de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)} & \text{si } (x,y) \in \mathbf{R} \times]-1,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie 1

1. On a : $\alpha = \frac{1}{2e^2\sqrt{2\pi}}$
2. $E(X.Y) = 0$.
3. Les densités marginales de X et Y sont :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R},$$

et

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y \in]-1,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. X est une va normale de moyenne 2 et de variance 1 et Y est uniforme sur $(-1,1)$.
5. X et Y sont indépendantes car

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$$

Partie 2

Soit U la variable aléatoire définie par : $U = \mid Y \mid$.

1. La fonction de répartition de U est

$$F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } t \in]0,1[, \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

2. La densité de U est :

$$f_U(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in]0,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et donc U est uniforme sur $(0,1)$.

3. La fonction génératrice de moments

$$\Phi_U(t) = E(e^{tU}) = \begin{cases} \frac{(e^t-1)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

.

4. On a donc $\Phi_U(t) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + o(t^2)$.
5. D'où $E(U) = \frac{1}{2}$ et la variance $Var(U) = \frac{1}{12}$.
6. Soit Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \max(U, 1 - 2U)$$

   (a) On a pour $\forall\, x \in]0,1[$

$$\max(x, 1-2x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ x & \text{si } \frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

   donc on en déduit que

$$\frac{1}{3} \leq \max(x, 1-2x) < 1$$

   (b) Comme U est uniforme sur $(0,1)$ alors $Z = \max(U, 1-2U)$ prend ses valeurs dans $[\frac{1}{3}, 1[$. Par suite $P(\frac{1}{3} < Z < 1) = 1$

   (c) La fonction de répartition de Z est

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3t-1}{2} & \text{si } t \in]\frac{1}{3}, 1[, \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

   .

   (d) La densité de Z est :

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } z \in]\frac{1}{3}, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   et donc Z est uniforme sur $]\frac{1}{3}, 1[$.

7. (a) La fonction génératrice de moments de la va LY est donnée par

$$\Phi_{LY}(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}+e^t-2}{t^2} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

   .

   (b) La moyenne $E(LY) = 0$ et la variance $Var(LY) = \frac{1}{6}$.

(c) On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$$

On a par le théorème de la limite centrale $\frac{\sqrt{6}S_n}{\sqrt{n}}$ converge vers une loi normale centrée réduite.

(d) Donc $\lim_{n\to\infty} P(S_n > 0) = \frac{1}{2}$

Partie 3

Soit Φ la fonction de répartition d'une variable normale centrée réduite.

1. La fonction de répartition F_X de la va X est donnée en fonction de Φ par

$$F_X(a) = \Phi(a-2)$$

2. On a évidemment

$$P(1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(1) = \Phi(1) - \frac{1}{2}$$

3. La valeur approchée l'intégrale est

$$\int_1^2 e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)}dx = 6.321$$

4. La densité de la variable aléatoire M^2 est

$$f_{M^2}(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi t}} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

.

5. (a) En posant $x = \frac{t}{2}(1+u)$, il est facile de voir que

$$g(t) = \frac{t}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{t}{2}(1+u))f(\frac{t}{2}(1-u))du$$

.

(b) Donc la densité ${X_1}^2 + {X_2}^2$ s'écrit par

$$g(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où ${X_1}^2 + {X_2}^2$ est une va exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

6. (a) On a pour tout $a > 0$;

$$F(a) = P({X_1}^2 + {X_2}^2 \leq a) = P\left((X_1, X_2) \in D(0, \sqrt{a})\right)$$

(b) Donc

$$F(a) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{a}{2}} & \text{si } a > 0, \\ 0 & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Il s'en suit en dérivant que la densité de ${X_1}^2 + {X_2}^2$ est

$$g(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$