REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2004

Concours Biologie et Géologie

Epreuve de Mathématiques

Date : Lundi 07Juin 2004	Heure : 8 H	Durée : 3 Heures	Nb pages : 4
Barème : Ex 1 : 4 pts ;	Ex 2 : 3 pts;	Ex 3 : 6 pts ;	Ex 4 : 7 pts;

L'usage des calculatrices est strictement interdit.
Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice 1.

1. Soit la série entière $\sum_{n\geq 1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ de la variable réelle x.

   Montrer que son rayon de convergence vaut 1.

   On pose $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, pour $x \in]-1\,,\,1[$.

2. $a)$ Calculer $S''(x)$, pour $|x|<1$.

   $b)$ En déduire l'expression de $S'(x)$ puis celle de $S(x)$ pour $|x|<1$.

3. Donner les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)2^n}\ ;\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)2^n}\quad \text{et}\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

4. $a)$ La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge-t-elle pour $|x| = 1$?

   $b)$ Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

<u>Exercice 2.</u>

On cherche une fonction $y(x)$ développable en série entière sur un intervalle $]-\rho\ ,\ \rho[$ avec $\rho > 0$, qui soit solution de l'équation différentielle

$$(*) \qquad \begin{cases} xy''(x) - y'(x) + xy(x) = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que si $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ vérifie $(*)$ sur $]-\rho\ ,\ \rho[$, alors on a :

   $a_0 = 1\ ,\ a_1 = 0$ et $a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)^2}$, pour $n \geq 1$.

2. Déterminer alors l'expression de $y(x)$ et donner son rayon de convergence.

<u>Exercice 3.</u>

1. Soit $g(x) = Arc\sin\sqrt{x}$, pour $0 \leq x \leq 1$.

   $a)$ Monter que g est dérivable sur $]0\ ,\ 1[$ et calculer $g'(x)$.

   $b)$ En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

   $c)$ Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x}}dx$.

   (On pourra poser $x = \sin^2\theta$).

2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On pose pour $x \in]0\ ,\ 1[$,

   $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ et on considère une variable aléatoire

   $X : \Omega \to]0\ ,\ 1[$, de densité f.

a) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$, de la variable aléatoire X.

b) Déterminer la fonction de répartition F de le variable aléatoire X.

c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F(t) + F(1-t) = 1$.

d) Que vaut $P(X < \frac{1}{2})$?

3. *a*) Déterminer les fonctions de répartition des variables aléatoires $\sqrt{X}$ et $g(X)$.

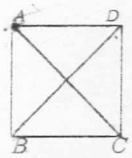
   b) En déduire la densité de chacune d'elle.

__Exercice 4.__

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $p \in]0\ , \frac{1}{2}[$.
Un pion se déplace sur les sommets d'un carré $ABCD$ (cf. figure) selon le protocole suivant:
· Le pion est sur le sommet A au départ.
· Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un coté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1-2p$.

On considère les événements suivants :

A_n : "Le pion se trouve en A à l'instant n".
B_n : "Le pion se trouve en B à l'instant n".
C_n : "Le pion se trouve en C à l'instant n".
D_n : "Le pion se trouve en D à l'instant n".



Notons par $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$, $d_n = P(D_n)$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$, où

$$M = \begin{pmatrix} 0 & p & 1\text{-}2p & p \\ p & 0 & p & 1\text{-}2p \\ 1\text{-}2p & p & 0 & p \\ p & 1\text{-}2p & p & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On considère les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique.

a) Montrer que $(u_1 \, , \, u_2 \, , \, u_3 \, , \, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Vérifier que $Mu_1 = u_1$, $Mu_2 = (1-4p)u_2$, $Mu_3 = (2p-1)u_3$ et $Mu_4 = (2p-1)u_4$.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que sa matrice dans la base canonique est M.

a) Ecrire la matrice D de f dans la base $(u_1 \, , \, u_2 \, , \, u_3 \, , \, u_4)$.

b) Déterminer une matrice Q inversible telle que $M = QDQ^{-1}$.

c) Calculer Q^2 puis en déduire Q^{-1}.

4. *a)* Montrer que $X_n = \dfrac{1}{4} QD^nQX_0$; pour tout $n \geq 1$.

b) En déduire a_n , b_n , c_n et d_n en fonction de n et p.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n$.