

Exercice 1.

1) On a pour tout  $t \in ]-1, 1[$ ,  $\frac{1}{1+t} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^p$ . Ce qui donne pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\text{Log}(1+x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} x^{p+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

2) a) Posons pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ . Alors on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ . Donc le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} a_n x^{n+2}$  vaut 1.

b) Si  $|x| = 1$ , alors  $|a_n x^{n+2}| = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) et comme la série de Riemann  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$  converge, il en résulte que la série  $\sum_{n \geq 1} a_n x^{n+2}$  converge pour  $|x| = 1$ .

3) a) Il est facile de vérifier que  $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{(n+1)}$ .

b) Soit  $N \geq 1$ , alors on a :

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)} = \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+2} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + x \sum_{n=2}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (*)$$

En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on obtient pour  $x \in ]-1, 1[$

$S(x) = \frac{x^2}{2} \text{Log}(x+1) + \frac{1}{2} (\text{Log}(x+1) - x + \frac{x^2}{2}) + x (\text{Log}(x+1) - x)$ , c'est à dire

$$S(x) = \frac{(x+1)^2}{2} \text{Log}(x+1) - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{4}, \text{ pour } x \in ]-1, 1[.$$

4) Pour  $x = \frac{1}{2}$ , on a :  $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)2^n} = \frac{9}{8} \text{Log} \frac{3}{2} - \frac{7}{16}$ .

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)2^n} = \frac{9}{8} \text{Log} \frac{3}{2} - \frac{7}{16}.$$

Pour  $x = \frac{1}{2}$ , on a :

$$S'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n(n+1)} = [(x+1) \text{Log}(x+1) - x]_{x=\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \text{Log} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n(n+1)} = 3 \text{Log} \frac{3}{2} - 1$$



Prenons  $x = -1$  dans la relation (\*), alors on a :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+2)} - \frac{1}{2}$$

Il s'ensuit que

②

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

Remarquons que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = -\lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x).$

**Exercice 2.** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tel que sa matrice dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) a) Le polynôme caractéristique de  $A$  est :

④

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 \\ -2 & 1-X & 2 \\ -2 & -1 & 4-X \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)(3-X).$$

• Les valeurs propres de  $A$  sont 1, 2 et 3.

b) Les valeurs propres de  $A$  sont simples, donc  $A$  est diagonalisable.

2) On a :  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$  et  $\lambda_3 = 3$ .

Soit  $E_k = \ker(A - kI), k \in \{1, 2, 3\}$ .

④

$$\text{On a } (x, y, z) \in E_k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$$

⑤

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = kx \\ -2x + y + 2z = ky \\ -2x - y + 4z = kz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-k)x - y + z = 0 \\ -2x + (1-k)y + 2z = 0 \\ -2x - y + (4-k)z = 0 \end{cases}$$

•  $(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow x = y = z$ . Donc  $E_1 = \text{Vect}(1, 1, 1)$ .

•  $(x, y, z) \in E_2 \Leftrightarrow x = z$  et  $y = 0$ . D'où  $E_2 = \text{Vect}(1, 0, 1)$ .

•  $(x, y, z) \in E_3 \Leftrightarrow x = 0$  et  $y = z$ . D'où  $E_3 = \text{Vect}(0, 1, 1)$ .

⑤

$$3) a) \text{ On a : } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3,5

$$b) \text{ on a : } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$


---

2,5

4) a) On a par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$

---

$$b) \forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n & 2^n-1 \\ 1-3^n & 1 & 3^n-1 \\ 1-3^n & 1-2^n & 3^n+2^n-1 \end{pmatrix}.$$


---

c) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ . Ce qui donne par récurrence:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n-1 \\ 3^n-1 \\ 3^n+2^n-1 \end{pmatrix}. \text{ C'est à dire pour tout } n \in \mathbb{N} :$$

3

$$x_n = 2^n - 1, \quad y_n = 3^n - 1, \quad z_n = 3^n + 2^n - 1$$


---

5) a) Soit  $M$  une matrice carrée réelle d'ordre 3 et  $N = P^{-1}MP$ .

3

$$AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \Leftrightarrow DN = ND.$$


---

b) Soit  $N = \begin{pmatrix} a & y & \gamma \\ x & b & z \\ \alpha & \beta & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Alors on a :

2

$$DN = \begin{pmatrix} a & y & \gamma \\ 2x & 2b & 2z \\ 3\alpha & 3\beta & 3c \end{pmatrix} \text{ et } ND = \begin{pmatrix} a & 2y & 3\gamma \\ x & 2b & 3z \\ \alpha & 2\beta & 3c \end{pmatrix}$$

Ce qui donne  $DN = ND \Leftrightarrow y = \gamma = x = z = \alpha = \beta = 0$ .

C'est à dire

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

c) Les matrices  $M$  qui commutent avec  $A$  (c'est à dire  $MA = AM$ ) sont de la forme :

$$\textcircled{2} \quad M = PNP^{-1} = \begin{pmatrix} a & a-b & b-a \\ a-c & a & -a \\ a-c & a-b & b-a \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

### . Exercice 3.

- $\textcircled{2}$  1) a) On a :  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\lambda}(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda \exp(-\lambda x) dx = 1$ . Donc pour tout  $\lambda > 0$ ,  $f_{\lambda}$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .  
b) Soit  $t \in \mathbb{R}$ , alors

$$\textcircled{3} \quad F_{-X}(t) = P(-X < t) = P(X > -t) = \int_{\max(-t, 0)}^{+\infty} \lambda \exp(-\lambda x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ \exp(\lambda t) & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

La variable aléatoire  $(-X)$  a pour densité de probabilité la fonction:

$$\textcircled{2} \quad \varphi_{\lambda}(x) = f_{\lambda}(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda \exp(\lambda x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2) a) La variable aléatoire  $(X - Y)$  a pour densité de probabilité la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\lambda}(t) \varphi_{\lambda}(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\lambda}(t) f_{\lambda}(t-x) dt.$$

Or,  $f_{\lambda}(t) f_{\lambda}(t-x) \neq 0 \Leftrightarrow t > 0$  et  $t-x > 0$ , c'est à dire  $t > \max(x, 0)$ .

Donc si  $x \leq 0$ , on a :

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda t} e^{-\lambda(t-x)} dt = \frac{\lambda}{2} \exp(\lambda x)$$

$\textcircled{3}$  et si  $x > 0$ , on a :

$$h(x) = \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda t} e^{-\lambda(t-x)} dt = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda x).$$

Ainsi, on a :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$h(x) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|x|).$$

b) Soit  $t \in \mathbb{R}$ , alors on a :  $P(|X - Y| < t) = 0$  si  $t \leq 0$  et pour  $t > 0$ ,

$$P(|X - Y| < t) = P(-t < X - Y < t) = \int_{-t}^t \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|x|) dx = \int_0^t \lambda \exp(-\lambda x) dx = 1 - \exp(-\lambda t).$$

③ Ainsi on a :  $F_{|X-Y|}(t) = P(|X - Y| < t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - \exp(-\lambda t) & \text{si } t > 0. \end{cases}$

② Il s'ensuit que la densité de la variable aléatoire  $|X - Y|$  est la fonction  $f_\lambda$ .

3) a)  $C$  sort le dernier de la poste si et seulement si  $\max(X_A, X_B) < \min(X_A, X_B) + X_C$ , c'est à dire

$$\max(X_A, X_B) - \min(X_A, X_B) = |X_A - X_B| < X_C.$$

③ Ainsi  $C$  sort le dernier de la poste si et seulement si l'événement  $(|X_A - X_B| < X_C)$  est réalisé.

b) Les variables  $X_A, X_B, X_C$  sont indépendantes, donc les variables  $|X_A - X_B|$  et  $X_C$  sont indépendantes et de même densité  $f_\lambda$  (d'après 2.b). Il en résulte d'après 2.a) que la variable aléatoire  $|X_A - X_B| - X_C$  admet la fonction  $h$  pour densité de probabilité.

La probabilité pour que  $C$  sorte le dernier est

②  $P(|X_A - X_B| < X_C) = P(|X_A - X_B| - X_C < 0) = \int_{-\infty}^0 h(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|x|) dx = \frac{1}{2}$

4) La variable aléatoire  $Z + T$  a pour densité  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t) f_\beta(x - t) dx$ .

Or,  $f_\alpha(t) f_\beta(x - t) \neq 0 \Leftrightarrow t > 0$  et  $x - t > 0$ , c'est à dire  $0 < t < x$ .

Donc si  $x \leq 0$ ,  $g(x) = 0$  et si  $x > 0$ , on a :

$$g(x) = \alpha\beta \int_0^x \exp(-\alpha t) \cdot \exp(-\beta(x - t)) dx = \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} \exp(-\beta x) \cdot [\exp(\beta - \alpha)x - 1]$$

C'est à dire

③ 
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} [\exp(-\alpha x) - \exp(-\beta x)] & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

5) Soit  $M = \min(X_A, X_B)$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

a) Si  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels, alors  $\min(a, b) \geq t$  ssi  $a \geq t$  et  $b \geq t$ .

③ Donc  $(M \geq t) = (X_A \geq t) \cap (X_B \geq t)$ .

b) Puisque les variables  $X_A, X_B$  sont indépendantes et de même loi, alors on a :

$$P(M \geq t) = P((X_A \geq t) \cap (X_B \geq t)) = (P(X_A \geq t))^2, \text{ c'est à dire}$$

③ 
$$P(M \geq t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ \exp(-2\lambda t) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

② Il s'ensuit que la variable aléatoire  $M$  a pour densité la fonction  $f_{2\lambda}$ .

② 6) a) On a  $T_C = \min(X_A, X_B) + X_C = M + X_C$ .  
Les variables aléatoires  $M$  et  $X_C$  sont indépendantes et de densités respectives  $f_{2\lambda}$  et  $f_\lambda$ , donc d'après 4), la variable aléatoire  $T_C$  a pour densité la fonction :

$$\textcircled{2} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 2\lambda[\exp(-\lambda x) - \exp(-2\lambda x)] & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

③ b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors on a :  $E((T_C)^n) = 2\lambda \left[ \int_0^{+\infty} x^n \exp(-\lambda x) dx - \int_0^{+\infty} x^n \exp(-2\lambda x) dx \right]$ .

Posons  $u = \lambda x$  (resp.  $u = 2\lambda x$ ), nous obtenons  $E((T_C)^n) = \frac{n!}{\lambda^n} \left( 2 - \frac{1}{2^n} \right)$ .

② + ② On déduit que  $E(T_C) = \frac{3}{2\lambda}$  et  $V(T_C) = E((T_C)^2) - (E(T_C))^2 = \frac{5}{4\lambda^2}$ .

\*\*\*\*\*