REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2005

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2005

Concours en Biologie et Géologie
Epreuve de Mathématiques

Durée: 3 heures Date: 10 Juin 2005 Heure: 8H Nbre de pages : 3
Barème: Ex 1 :4.5 pts ; Ex 2 :6.5 pts ; Ex 3 :9 pts .

L'usage des calculatrices est strictement interdit.
Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice 1.

1. Montrer que $Log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, pour $x \in]-1\,,\,1[$.
2. On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$.
   a) Montrer que son rayon de convergence vaut 1.
   b) Est-elle convergente pour $|x| = 1$?
3. On pose pour $x \in]-1\,,\,1[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$.
   a) Vérifier que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$.
   b) En déduire que pour $x \in]-1\,,\,1[$, $S(x) = \frac{(x+1)^2}{2} Log(x+1) - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{4}$.
4. Donner les valeurs des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)2^n} \;;\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)2^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 2.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que sa matrice dans la base canonique $B = (e_1\,,\,e_2\,,\,e_3)$ soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. *a*) Déterminer les valeurs propres de A.
   b) La matrice A est-elle diagonalisable?

2. Déterminer les sous espaces propres de A.
(On classera les valeurs propres par ordre croissant $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ et on choisira la dernière composante égale à 1 pour les vecteurs propres associés).

3. *a*) Déterminer une matrice inversible P telle que :

$$A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

b) Calculer P^{-1}.

4. *a*) Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
b) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
c)Déterminer les suites réelles x_n , y_n , z_n qui vérifient les relations suivantes:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = -2x_n - y_n + 4z_n \end{cases} \text{ et } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. *a*) Soit M une matrice carrée réelle d'ordre 3 et $N = P^{-1}MP$.
Montrer que $AM = MA \Leftrightarrow DN = ND$.
b) Déterminer les matrices N telles que $DN = ND$.
c) En déduire les matrices M telles que $AM = MA$.

Exercice 3.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.Dans la suite, les variables aléatoires sont définies sur Ω et elles sont à valeurs réelles.On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives u et v , alors $U+V$ est une variable aléatoire de densité:

$$w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(x-t)dt, x \in \mathbb{R}.$$

On pose pour $\lambda > 0$, $f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda\exp(-\lambda x) , & \text{si } x > 0 \\ 0 , & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1. *a*) Vérifier que f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
b) Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f_λ.Déterminer la fonction de répartition $F_{(-X)}$ de la variable aléatoire $(-X)$ et en déduire sa densité de probabilité.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même densité de probabilité f_λ.
a) Montrer que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité de probabilité la fonction $h(x) = \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|)$, $x \in \mathbb{R}$.
b) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $P(\ |X - Y|\ < t)$ et en déduire que la variable aléatoire $|X - Y|$ admet pour densité de probabilité la fonction f_λ.

Trois personnes A , B , C se rendent à la poste au même instant pour téléphoner. Il n'y a que deux cabines , que occupent immédiatement A et B , et C attend.
On suppose que les durées de communication téléphonique de chacune, notées X_A , X_B , X_C sont des variables aléatoires indépendantes de même densité de probabilité f_λ.

3. *a*) Vérifier que C sort le dernier de la poste si et seulement si l'événement $(|X_A - X_B| < X_C)$ est réalisé.

b) Montrer (sans calcul) que la variable aléatoire $|X_A - X_B| - X_C$ admet la fonction h pour densité de probabilité. En déduire la probabilité pour que C sorte le dernier.

Soient Z et T deux variables aléatoires indépendantes,de densités respectives f_α et f_β avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha \neq \beta$.

4. Montrer que la variable aléatoire $Z + T$ suit la loi de densité :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}\left[\exp(-\alpha x) - \exp(-\beta x)\right], & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

5. Soit $M = \min(X_A , X_B)$ et $t \in \mathbb{R}$.

a) Vérifier que $(M \geq t) = (X_A \geq t) \cap (X_B \geq t)$.

b) Calculer $P(M \geq t)$ et en déduire la densité de probabilité de la variable aléatoire M.

6. Soit T_C la variable aléatoire égale au temps total passé par C à la poste.

a) Montrer que T_C suit la loi de densité

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2\lambda\left[\exp(-\lambda x) - \exp(-2\lambda x)\right], & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

b) Calculer $E((T_C)^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire l'espérance $E(T_C)$ et la variance $V(T_C)$ de la variable aléatoire T_C.

(On donne: $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$, $n \in \mathbb{N}$).

♣♣♣