REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2006

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2006

CON

Concours Biologie et Géologie
Epreuve de Mathématiques

Durée : 3 H Date : 5 Juin 2006 Heure : 8 H Nb de pages : 4
Barème : Exercice 1 : 6 points Exercice 2 : 4 points Problème : 10 points

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice 1

Soient $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de R^3, f l'endomorphisme de R^3 dont la matrice relativement à la base B_c est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}.$$

1. a. Calculer le polynôme caractéristique de A.
   b. En déduire que A est diagonalisable.
2. Soient $v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 - e_2$ et $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

a. Vérifier que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de R^3.
b. Ecrire la matrice D de f dans la base B.
3. Soit P la matrice de passage de B_c à B. Calculer P^{-1}.
4. On considère la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

et on pose $\Delta = P^{-1}CP$.

a. Vérifier que

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

b. En déduire les valeurs propres de C.

5. Pout tout entier $n \in N$, on définit la matrice colonne $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ par

$$Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n, \, \forall n \in N,$$

où a_n, b_n, c_n sont des réels.

a. Montrer alors que $\forall n \in N$ on a

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1}, \\ b_{n+2} = 4b_n, \\ c_{n+2} = -4c_{n+1} - 4c_n. \end{cases}$$

b. En déduire les expressions explicites de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

6. Déterminer les matrices colonnes X_n définies par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_{n+2} = AX_{n+1} + CX_n, \, \forall n \in N.$$

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de fonction de densité conjointe défini par

$$f(x,y) = \begin{cases} k(2x + 3y^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de k.
2. On désigne par F la fonction de répartition du couple (X,Y).

a. Déterminer $F(t,z)$ lorsque $0 \leq t \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1$.

b. Déterminer $F(t,z)$ lorsque $t > 1$ et $0 \leq z \leq 1$.

c. Déterminer $F(t,z)$ lorsque $0 \leq t \leq 1$ et $z > 1$

d. Déterminer $F(t,z)$ lorsque $t > 1$ et $z > 1$.

3. Donner les fonctions de répartitions marginales de X et Y.
4. a. Calculer les espérances mathématiques $E(X), E(Y), E(XY)$.

   b. En déduire la covariance $Cov(X,Y)$ entre X et Y.

Problème

Partie I

Pour tout entier naturel n , on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. a. Etablir que $\forall n \in N \quad (n+2)\, I_{n+2} = (n+1)\, I_n$.
   b. En déduire que pour tout entier n,

$$I_{2n} = \frac{C_{2n}^n}{4^n}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{4^n}{(2n+1)C_{2n}^n}.$$

3. a. Montrer que pour tout entier n,

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

   b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2(4^n)^2}{(C_{2n}^n)^2(2n+1)} = \pi$.

   c. En déduire que $C_{2n}^n \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$quand n tend vers $+\infty$.

Partie II

1. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} C_{2n}^n \, x^n$ et on note S sa somme.

a. Quel est le rayon de convergence R de cette série entière ?

b. Montrer que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} C_{2n}^n \, R^n$ diverge.

c. Quelle est la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} C_{2n}^n \, (-R)^n$?

2. On note S' la dérivée de S .

a. Montrer que

$$S(x) = \left(-2x + \tfrac{1}{2}\right) S'(x), \text{ pour tout } x \text{ de }]-R, R[\,.$$

b. En déduire l'expression de $S(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

Partie III

1. On considère l'équation différentielle (E) : $(1-x^2)\,y' - xy = 1$.

On se propose de trouver les solutions de (E) développables en série entière à l'origine qui sont de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$.

a. Vérifier que $a_{2n+1} = \dfrac{4^n}{(2n+1)\,C_{2n}^n}$, $\forall n \in N$.

b. Trouver le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$.

2. Soit $f(x) = \dfrac{Arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

3. a. Montrer que f vérifie l'équation (E).

b. En déduire le développement en série entière de la fonction f et de la fonction $g : x \longrightarrow (Arc\sin x)^2$.