Correction du sujet de Maths (Biologie et Géologie) Session 2007

Exercice

1. a) $P_\lambda(A) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

Les valeurs propres de A sont 1 (double) et 2 (simple).

b) $rg(A - I) = rg \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$. D'après le théorème du rang

$dimKer(A - I) = 2$ donc A est diagonalisable.

2. a) Pour $\lambda = 1$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour $\lambda = 2$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 2^n & 1 - 2^n \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$

4. $X_n = \frac{1}{3}AX_{n-1}$. Par récurrence $X_n = (\frac{1}{3})^n A^n X_0$. D'où

$$\begin{cases} x_n &= (\frac{2}{3})^n(x_0 + y_0 - z_0) + (\frac{1}{3})^n(z_0 - y_0) \\ y_n &= (\frac{2}{3})^n(x_0 + y_0 - z_0) + (\frac{1}{3})^n(z_0 - x_0) \\ z_n &= (\frac{2}{3})^n(x_0 + y_0 - z_0) + (\frac{1}{3})^n(-x_0 - y_0 + 2z_0) \end{cases}$$

5. a) On a $\sum_{n\geq 0} x_n = \sum_{n\geq 0} y_n = \sum_{n\geq 0} z_n = 1$. Utilisons le fait que $\sum_{n\geq 0}(\frac{2}{3})^n = 3$ et $\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{3})^n = \frac{3}{2}$.

On trouve $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{3}$ et $x_n = y_n = z_n = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$.

b) $P(X + 1 = n) = P(X = n - 1) = (\frac{2}{3})^{n-1}\frac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{3}$, d'où $E(X + 1) = 3$.

c) $E(\frac{1}{X+1}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} P(X=n) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} (\frac{2}{3})^n \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} (\frac{2}{3})^{n+1}$

$= \frac{1}{2}(-Log(1-\frac{2}{3})) = \frac{1}{2} Log(3).$

Problème

Partie 1

1. En faisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$.

2. On pose $t = \sqrt{a}\, x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Partie 2

1. On a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y) dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y(1+x^2)}{2}} dy = \frac{1}{\pi} \Big[-\frac{e^{-\frac{y(1+x^2)}{2}}}{1+x^2} \Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

2. a) $Z = \frac{2}{\pi} Arctg(X)$, $Z(\Omega) =]-1,1[$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\frac{2}{\pi} Arctg(X) \leq z)$$

• si $z \leq -1$ $\quad F_Z(z) = 0$

• si $z \in]-1,1[$ $\quad F_Z(z) = P(X \leq tg(\frac{\pi}{2} z)) = F_X(tg(\frac{\pi}{2} z))$ avec $\frac{\pi}{2} z \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

or $F_X(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} Arctg(x) + \frac{1}{2}$.

• si $z \geq 1$ $\quad F_Z(z) = 1$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq -1 \\ \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} & \text{si } z \in]-1,1[\\ 1 & \text{si } z \geq 1. \end{cases}$$

b) $f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } z \in]-1,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Z suit une loi uniforme sur $]-1,1[$.

3. On a $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

$$f_{Z_1+Z_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_1}(x) f_{Z_2}(t-x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_{Z_2}(t-x)dx = \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1} f_{Z_2}(y)dy$$

- Si $t \leq -2$, $f_{Z_1+Z_2}(t) = 0$.
- Si $-2 < t < 0$, $f_{Z_1+Z_2}(t) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{t+1} dy = \frac{t+2}{4}$
- Si $0 < t < 2$, $f_{Z_1+Z_2}(t) = \frac{1}{4}\int_{t-1}^{1} dy = \frac{2-t}{4}$
- Si $t \geq 2$, $f_{Z_1+Z_2}(t) = 0$

$$f_{Z_1+Z_2}(t) = \begin{cases} \frac{t+2}{4} & \text{si } -2 < t \leq 0 \\ \frac{2-t}{4} & \text{si } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. a) On a

$$\min(t, 1-t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1-t & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases} .$$

$\forall t \in [0, 1[, \quad 0 \leq \min(t, 1-t) \leq \frac{1}{2}$.

b)

$$f_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) On a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = P(\min(L, 1-L) \leq t)$$

- Si $t < 0$, $F(t) = 0$
- Si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

$$F(t) = 1 - P(\min(L, 1-L) > t) = 1 - P(L > t, 1-L > t) = 1 - P(t < L < 1-t)$$

$$= 1 - (F_L(1-t) - F_L(t)) = 2t$$

- Si $t > \frac{1}{2}$, $F(t) = 1$

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\min(L, 1-L)$ suit une loi uniforme sur $[0, \frac{1}{2}]$.

Partie 3

1. a) On a On a $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)dx$

• Si $y \leq 0$, $\quad f_Y(y) = 0$.
• Si $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{yx^2}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}.$$

la loi marginale de Y est donnée par

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) On a $\forall\, y > 0$

$$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)(x,y)}}{f_Y(y)} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{yx^2}{2}}$$

$X/Y = y$ suit une loi normale $N(0, \frac{1}{y})$.

2. On a $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $\quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt$
• Si $y \leq 0$, $\quad F_Y(y) = 0$.
• Si $y > 0$,

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2(\phi(\sqrt{y}) - \phi(0)) = 2\phi(\sqrt{y}) - 1.$$

3. On a $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $\quad F_{\sqrt{Y}}(y) = P(\sqrt{Y} \leq y)$
• Si $y \leq 0$, $\quad F_{\sqrt{Y}}(y) = 0$.
• Si $y > 0$, $\quad F_{\sqrt{Y}}(y) = P(Y \leq y^2) = 2\phi(y) - 1$.
la densité de $\sqrt{Y}$ est donnée par

$$f_{\sqrt{Y}}(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. a) On a $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\quad F_T(t) = P(U^2 + V^2 \leq t)$
• Si $t \leq 0$, $\quad F_T(t) = 0$.
• Si $y > 0$, $\quad F_T(t) = P((U, V) \in D_t)$ $\quad$ où

$$D_t = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u > 0,\ v > 0 \text{ et } u^2 + v^2 \leq t\}$$

$$F_T(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{t}} r\, e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\theta = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$$

la densité de T est donnée par

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La VAR T suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

b) $\Phi_T(t) = E(e^{tT}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_T(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{(t-\frac{1}{2})x}dx.$

- Si $t \geq \frac{1}{2}$, l'integralle diverge.
- Si $t < \frac{1}{2}$, $\Phi_T(t) = \frac{1}{1-2t}$.

c) $\forall t \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $\Phi_T(t) = \sum_{n\geq 0} 2^n t^n$.

d) $\mathcal{M}_n(T) = \Phi_T^{(n)}(0)$ or $\frac{\Phi_T^{(n)}(0)}{n!} = 2^n$ d'où $\mathcal{M}_n(T) = 2^n n!$.

e) On a

$$\mathcal{M}_n(T) = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{2} e^{-\frac{t}{2}} dt = 2^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = 2^n n!$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

5. a) On a $E(T) = 2$ et $V(T) = 4$

$E(S_n) = 2n$ et $V(S_n) = 4n$, d'après le Théorème de la limite centrée, $\left(\frac{S_n - 2n}{2\sqrt{n}}\right)_n$ converge vers la loi $N(0,1)$.

b) $P(S_n > 2n) = P(\frac{S_n - 2n}{2\sqrt{n}} > 0) = 1 - P(\frac{S_n - 2n}{2\sqrt{n}} \leq 0)$.

$\lim_{n\to+\infty} P(S_n > 2n) = 1 - \phi(0) = \frac{1}{2}$.

c) Soit $\lambda > 0$, l'inégalité de Tchebychev, donne

$$P(|S_n - 2n| \geq n\lambda) \leq \frac{V(S_n)}{n^2\lambda^2} = \frac{4}{n\lambda^2}.$$

alors

$$P(|S_n - 2n| \leq n\lambda) = 1 - P(|S_n - 2n| \geq n\lambda) \geq 1 - \frac{4}{n\lambda^2} = A(n).$$

d)On a

$$1 - \frac{4}{n\lambda^2} \leq P(|S_n - 2n| \leq n\lambda) \leq 1.$$

$\lim_{n\to+\infty} P(|S_n - 2n| \leq n\lambda) = 1.$