Corrigé BG 2011
Problème I

	Correction	Barème
I.1.	• Equation d´Euler d´un fluide parfait en absence de forces volumiques : $$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right]=-\overrightarrow{grad}P$$ • Equation de conservation de la masse $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}=0$$	0.5 0.5
I.2.	Dans le cadre de l´approximation acoustique, on néglige les termes d´ordre supérieur ou égal à deux : $\lvert p(x,t)\rvert \ll P_0$; $\lvert\mu(x,t)\rvert \ll \rho_0$; $v \ll c$ Les équations d´Euler et de conservation de la masse s´écrivent dans le cadre de l´approximation acoustique, de la forme : $$\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\overrightarrow{grad}p \quad (1)$$ $$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad (2)$$	0.25 0.25 0.25
I.3.	Pour une propagation unidimensionnelle dans la direction (Ox), . $$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial P}{\partial x}$$	0. 5
I.4.	$$\chi_S=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_S\approx\frac{1}{\rho}\frac{\rho-\rho_0}{P-P_0}\approx\frac{1}{\rho_0}\frac{\mu}{p}$$ D´où : $$\mu(x,t)=\rho_0\chi_S p(x,t)$$	0.5
I.5.	D´après les équations (I.3) et (I.4) on a : $$\rho_0\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \quad (I)$$ $$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad (II)$$ $$\mu\approx\rho_0\chi_S p \quad (III)$$ $$\frac{\partial(I)}{\partial x}-\frac{\partial(II)}{\partial t}\Rightarrow\rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}-\rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}=0$$	0.5

	$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = 0$$ $$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$ En posant : $c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_S}$, on obtient : $$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$ Où : $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$ est la vitesse de propagation du son dans le fluide.	0.25
	En faisant : $$\frac{\partial (I)}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0 \chi_S}\frac{\partial (II)}{\partial x}$$	0.5
	On obtient : $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$ Les équations vérifiées par $p(x,t)$ et $v(x,t)$ sont du type <u>équation de d´Alembert</u>.	0.25
I.6.	Les solutions $p(x,t)$ et $v(x,t)$ des équations de propagation précédentes s´écrivent de la forme : $$p(x,t) = \underbrace{f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)}_{\substack{\text{Onde progressive} \\ \text{Vers } x>0}} + \underbrace{f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)}_{\substack{\text{Onde progressive} \\ \text{Vers } x<0}}$$ $$v(x,t) = g_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$	0.5
I.7.	Dans le cas d´un gaz parfait, l´équation d´état d´un gaz parfait est : $$PV = nRT = \frac{m}{M}RT$$ $$P = \rho_0 \frac{RT}{M}$$ L´évolution étant isentropique, on peut alors appliquer la loi de Laplace : $$PV^\gamma = cte \Leftrightarrow \frac{P}{\rho^\gamma} = cte$$ En différentiant : $$\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$	0.75

	Ainsi : $$\frac{d\rho}{dP}=\frac{\rho}{\gamma P}\approx\frac{\rho_0}{\gamma P}$$ $$\chi_S=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_S\approx\frac{1}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\gamma P}\approx\frac{1}{\gamma P}=\frac{1}{\gamma}\frac{M}{\rho_0 RT}$$ $$c^2=\frac{1}{\rho_0\chi_S}=\frac{1}{\rho_0}\frac{\rho_0 RT\gamma}{M}=\frac{\gamma RT}{M}$$ $$c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$ Application numérique : $c=345{,}7\ m.s^{-1}$	0,25
	II- Propagation des ondes planes progressive monochromatique : $$p(x,t)=p_0e^{j(\omega t-kx)}$$ $$v(x,t)=v_0e^{j(\omega t-kx)}$$	
II.1.1.	$$p(x,t)=p_0e^{j(\omega t-kx)}$$ En injectant cette solution dans l´équation de propagation : $$\frac{\partial^2p}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2p}{\partial t^2}=0$$ $$-k^2\underline{p}+\frac{\omega^2}{c^2}\underline{p}=0$$ $$\left(-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{p}=0$$ $$-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}=0$$ $$k=\frac{\omega}{c}$$	0.5
II.1.2.	$$\lambda=\frac{c}{f}$$ $c=345{,}7m.s^{-1}$ et $f=3MHz$ <u>A.N</u> : $\lambda=0{,}115mm$	0.25
II.2.1.	On a : $$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}=0$$ $$\rho_0(j\omega)\underline{v}-jk\underline{p}=0$$ $$\underline{v}=\frac{k}{\rho_0\omega}\underline{p}=\frac{1}{\rho_0c}\underline{p}$$ $$\underline{Z_c}=\frac{\underline{p}}{\underline{v}}=\rho_0c$$	0.5

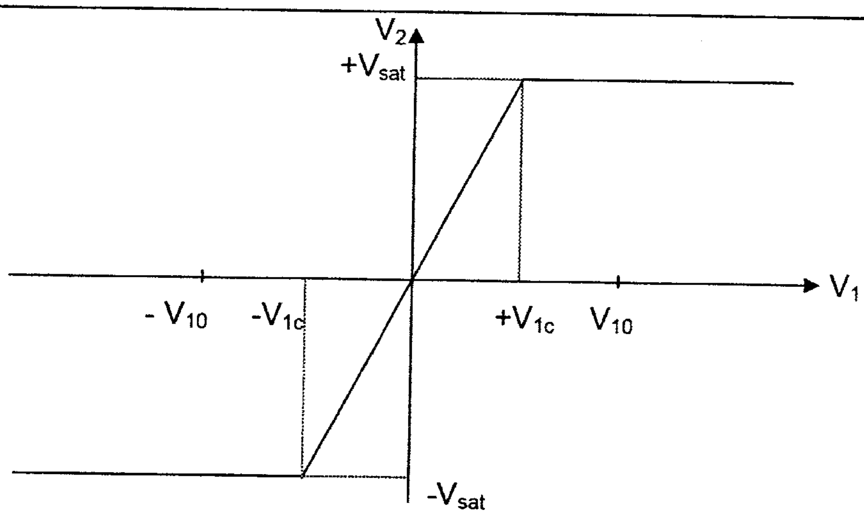
<table>
<tr><td></td><td>$$Z_c = |\underline{Z_c}| = \rho_0 c$$</td><td></td></tr>
<tr><td>II.2.2.</td><td>Dans le cas d´une propagation vers $x < 0$:
$$p(x,t) = p_0 e^{j(\omega t + kx)}$$
$$v(x,t) = v_0 e^{j(\omega t + kx)}$$
Donc :
$$Z_c = -\rho_0 c$$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>II.2.3.</td><td>Dans le cas de l´air :
$$c = 345{,}7 m.s^{-1}$$
$$\rho_0 = 1{,}3 Kg.m^{-3}$$
$$Z_c = 449{,}41 Kg.m^{-2}.s^{-1}$$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>III. Réflexion et transmission d´une onde acoustique :</u>
$$p_i(x,t) = p_0 Cos(\omega t - k_1 x)$$
$$\overrightarrow{k_1} = \frac{\omega}{c_1}\overrightarrow{U_x}$$</td></tr>
<tr><td>III.1.</td><td>• Pour l´onde réfléchie :
$$\overrightarrow{k_r} = -\frac{\omega}{c_1}\overrightarrow{U_x} = -\overrightarrow{k_1}$$
$$p_r(x,t) = p_{0r} Cos(\omega t - k_r x) = p_{0r} Cos(\omega t + k_1 x)$$
• Pour l´onde transmise :
$$\overrightarrow{k_t} = \frac{\omega}{c_2}\overrightarrow{U_x} = \overrightarrow{k_2}$$
$$p_t(x,t) = p_{0t} Cos(\omega t - k_t x) = p_{0t} Cos(\omega t - k_2 x)$$</td><td>0.25
0.25
0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>III.2.</td><td>On a :
$$Z_c = \frac{p}{v} \Leftrightarrow v = \frac{p}{Z_c}$$
Ainsi :
$$v_i(x,t) = \frac{1}{Z_{c1}} p_i(x,t) = \frac{p_0}{\rho_1 c_1} Cos(\omega t - k_1 x)$$
$$v_r(x,t) = -\frac{1}{Z_{c1}} p_r(x,t) = -\frac{p_{0r}}{\rho_1 c_1} Cos(\omega t + k_1 x)$$
$$v_t(x,t) = \frac{1}{Z_{c2}} p_t(x,t) = \frac{p_{0t}}{\rho_2 c_2} Cos(\omega t - k_2 x)$$</td><td>0.5
0.5
0.5</td></tr>
<tr><td>III.3.</td><td>A l´interface $x = 0$ séparant les deux milieux (1) et (2), on a :
- Continuité de la surpression :
$$p_1(x=0,t) = p_2(x=0,t)$$
$$p_i(x=0,t) + p_r(x=0,t) = p_t(x=0,t) \quad (1)$$</td><td>0.5</td></tr>
</table>

	- Conservation du débit volumique : $D_{v1}(x=0) = D_{v2}(x=0)$ $v_1(x=0,t).S = v_2(x=0,t).S$ $v_i(x=0,t) + v_r(x=0,t) = v_t(x=0,t)$ $\frac{1}{Z_{c1}}[p_i(x=0,t) - p_r(x=0,t)] = \frac{1}{Z_{c2}} p_t(x=0,t)$ $p_i(x=0,t) - p_r(x=0,t) = \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}} p_t(x=0,t) \quad (2)$ • (1) + (2) donne : $2p_i(x=0,t) = \left(1 + \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}\right) p_t(x=0,t)$ $\tau_p = \frac{p_t(x=0,t)}{p_i(x=0,t)} = 2\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}+Z_{c2}}$ • (1) - $\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}$ (2) donne : $\left(1 - \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}\right) p_i(x=0,t) + \left(1 + \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}\right) p_r(x=0,t) = 0$ $\frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c1}} p_i(x=0,t) = \frac{Z_{c1} + Z_{c2}}{+Z_{c2}} p_r(x=0,t)$ $r_p = \frac{p_r(x=0,t)}{p_i(x=0,t)} = \frac{Z_{c2}-Z_{c1}}{Z_{c1}+Z_{c2}}$	0,75 0.5 0.5
III.4.1.	• Le coefficient de réflexion en énergie est : $R = \left\|\frac{I_r(x=0,t)}{I_i(x=0,t)}\right\| = \left\|\frac{p_r(x=0,t)}{p_i(x=0,t)}\right\|^2 = {r_p}^2 = \left\|\frac{Z_{c2}-Z_{c1}}{Z_{c1}+Z_{c2}}\right\|^2$ • Le coefficient de transmission en énergie est $T = \left\|\frac{I_t(x=0,t)}{I_i(x=0,t)}\right\| = \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}\left\|\frac{p_t(x=0,t)}{p_i(x=0,t)}\right\|^2 = 4\frac{Z_{c2}Z_{c1}}{(Z_{c1}+Z_{c2})^2}$	0.5 0.5
III.4.2.	$R + T = \left\|\frac{Z_{c2}-Z_{c1}}{Z_{c1}+Z_{c2}}\right\|^2 + 4\frac{Z_{c2}Z_{c1}}{(Z_{c1}+Z_{c2})^2}$ $R + T = \frac{{Z_{c2}}^2 + {Z_{c1}}^2 - 2Z_{c2}Z_{c1} + 4Z_{c2}Z_{c1}}{(Z_{c1}+Z_{c2})^2} = \frac{(Z_{c1}+Z_{c2})^2}{(Z_{c1}+Z_{c2})^2}$ $R + T = 1$	0.5
III.4.3.	Cette équation traduit la conservation de l´énergie	0.25
IV.1.	**IV- Application à l´échographie ultrasons :** $R_{air/peau}$ =0.99 $R_{peau/graisse}$ =0.0064	0.25 0.25

IV.2.	Comme $R_{air/peau} \approx 1$, les ondes ultrasons sont réfléchies au niveau de la peau, on ne peut, donc, pas les faire pénétrer dans le corps humain.	0.25
IV.3.	Pour faire pénétrer des ultrasons dans le corps humain, il faut éviter la présence de couche d´air entre la sonde et la peau, pour cela on utilise un gel dont l´impédance est voisine de celle de la peau pour avoir $R \approx 0$ (adaptation d´impédance).	0.25

Problème II :

I.1.	Lorsque l´AOP fonctionne en régime linéaire, on a : $$V^+ = V^-$$ Or : $V^+ = V_1$ $\frac{V_2 - V^-}{R_2} = \frac{V^-}{R_1} \Leftrightarrow V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_2$ D´où : $$V_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_1 = G V_1$$	0.5
	G étant le gain en tension de l´AOP défini par : $G = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$	0.25
I.2.	L´AOP fonctionne en régime linéaire si : $$-V_{sat} < V_2 < +V_{sat}$$ $$-V_{sat} < \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_1 < +V_{sat}$$ $$-\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} < V_1 < +\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$$	0.5
	$\Rightarrow |V_1| \leq V_{1c}$ où $V_{1c} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$	0.25

I.3.		0.5
II.1.	D´après la loi des nœuds : $$i = C\frac{dV_4}{dt} + \frac{V_4}{R}$$	0.25
II. 2.	Loi des mailles : $$V_3 = V_4 + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt$$ $$\Rightarrow \frac{dV_3}{dt} = \frac{dV_4}{dt} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{c}$$ Or : $$i = C\frac{dV_4}{dt} + \frac{V_4}{R}$$ $$\Rightarrow \frac{dV_3}{dt} = \frac{dV_4}{dt} + R\frac{d}{dt}\left(C\frac{dV_4}{dt} + \frac{V_4}{R}\right) + \frac{1}{c}\left(C\frac{dV_4}{dt} + \frac{V_4}{R}\right)$$ $$\Rightarrow RC\frac{d^2V_4}{dt^2} + 3\frac{dV_4}{dt} + \frac{1}{RC}V_4 = \frac{dV_3}{dt}$$ $$\Rightarrow \frac{d^2V_4}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{dV_4}{dt} + \left(\frac{1}{RC}\right)^2 V_4 = \frac{1}{RC}\frac{dV_3}{dt}$$ On pose : $\alpha = 3$; $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, on a alors : $$\frac{d^2V_4}{dt^2} + \alpha\omega_0\frac{dV_4}{dt} + \omega_0^2 V_4 = \omega_0\frac{dV_3}{dt}$$	0.5 0.25
III.1.	L´AOP étant idéal, le courant $i^+ = 0$, il y´a pas de courant en provenance de la borne (+). Le résultat précédent reste, alors, valable.	0.25
III.2.	On a : $$V_3 = V_2 \; et \; V_4 = V_1$$	

	• Si $\|V_1\| \leq V_{1c}$: $$V_2 = GV_1 \Rightarrow \frac{d^2V_1}{dt^2} + a\omega_0\frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = \omega_0 G\frac{dV_1}{dt}$$ $$\Rightarrow \frac{d^2V_1}{dt^2} + \omega_0(a-G)\frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = 0$$ $$\Rightarrow \frac{d^2V_1}{dt^2} + b_1\omega_0\frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = 0\ ;\ b_1 = a - G$$ • Si $\|V_1\| \geq V_{1c}$: $$V_2 = \pm V_{sat} \Rightarrow \frac{dV_3}{dt} = \frac{dV_2}{dt} = 0$$ $$\Rightarrow \frac{d^2V_1}{dt^2} + a\omega_0\frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = 0$$ $$\Rightarrow \frac{d^2V_1}{dt^2} + b_2\frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = 0\ ;\ b_2 = a\omega_0$$	0.5 0.25 0.5 0.25
III.3.	On peut générer des oscillations sinusoïdales pour $b_1 = a - G = 0$, c´est à dire pour $G = a$ =3.	0.25