Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2012

Concours Biologie et Géologie
Correction de l'Epreuve de Mathématiques

Exercice

1. On a $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 3) = 0$.

---

2. Soit n entier naturel non nul, $\{(X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3)\}$ est un sysrème complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1)\\ &+ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 2)\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 3)\mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_n = 2)\mathbb{P}(X_n = 2)\\ &+ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_n = 3)\mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n = 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 3) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 3 | X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 3 | X_n = 2)\mathbb{P}(X_n = 2)\\ &+ \mathbb{P}(X_{n+1} = 3 | X_n = 3)\mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3)\end{aligned}$$

Soit $U_{n+1} = AU_n$, avec A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par: $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

---

3. (a) A est triangulaire, les valeurs propres coincident avec les éléments diagonaux. Soit $\mathrm{Sp}(A) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. La matrice A amet trois v.p distinctes, donc A est diagonalisable.

(b) On a $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

(c) On a $A = PDP^{-1}$, donc $A^n = PD^nP^{-1}$. Soit $A^n = \begin{pmatrix}\left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0\\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0\\ 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n & 1\end{pmatrix}$.

(d) On a: $U_n = A^{n-1}U_1$. Soit $U_n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$ c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \quad \mathbb{P}(X_n = 2) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 3) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 2$$

---

4. (a) On a: $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 2) = 0$.
Y est une variable aléatoire discrète, donc:
Pour $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = n) &= \mathbb{P}(n - 1 < Y \leq n) = \mathbb{P}(Y \leq n) - \mathbb{P}(Y \leq n - 1) \\ &= P(X_n = 3) - P(X_{n-1} = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

(b) Le rayon de convergence r de $\sum \mathbb{P}(Y = n)x^n$ vaut $r = \frac{3}{2}$ et pour tout $x < \frac{3}{2}$,

$$g_Y(x) = \frac{4x^3}{9}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2x}{3}\right)^n - \frac{2x^3}{9}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{4x^3}{3\,(3 - 2x)} - \frac{2x^3}{3\,(3 - x)} = \frac{2x^3}{2x^2 - 9x + 9}.$$

(c) Pour $x < \frac{3}{2}$, $\quad g'_Y(x) = \dfrac{6x^2}{2\,x^2 - 9\,x + 9} - \dfrac{2x^3\,(4\,x - 9)}{(2\,x^2 - 9\,x + 9)^2}$.
On a: $\mathbb{E}(Y) = g'_Y(1) = \dfrac{11}{2}$.

Problème

Partie I

---

1. • $\lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} \sim_0 \lambda^p x^{p-1}$ et $\displaystyle\int_0 x^{p-1}dx$ converge.
De plus $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left(\lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}\right) = 0$. Donc $\Gamma(p, \lambda)$ converge.
• $x^{p-1}(1 - x)^{q-1} \sim_0 x^{p-1}$ et $\displaystyle\int_0 x^{p-1}dx$ converge;
$x^{p-1}(1 - x)^{q-1} \sim_1 (1 - x)^{q-1}$ et $\displaystyle\int^1 (1 - x)^{q-1}dx$ converge. Donc $B(p, q)$ converge.

---

2. En effectuant le changement de variable $u = \lambda x$, on obtient $\Gamma(p, \lambda) = \Gamma(p)$.

---

3. Pour $A > \varepsilon > 0$, par intégration par parties $\displaystyle\int_\varepsilon^A t^p e^{-t} dt = [u(t)v(t)]_\varepsilon^A + p \int_\varepsilon^A t^{p-1} e^{-t} dt$,

pour: $\begin{cases} u(t) = t^p & u'(t) = pt^{p-1} \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

En faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$, on obtient $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

---

4. Par itération, on montre que pour p un entier naturel non nul, $\Gamma(p) = (p-1)!$.

---

5. (a) Par le changement de variable $\theta = \arccos\sqrt{x}$, on montre que $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta$.

Par le changement de variable $u = \sqrt{x}$, on montre que $\Gamma(p) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2p-1} du$.

(b) On a $\Gamma(p) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2p-1} du$ et $\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-v^2} v^{2q-1} dv$. Pour $\Delta = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ et en passant en coordonne'es polaires, on obtient

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\iint_\Delta e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} du dv = 4\iint_D e^{-r^2} (r\cos\theta)^{2p-1} (r\sin\theta)^{2q-1} r dr d\theta$$

(c) On a: $\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr = B(p,q)\Gamma(p+q)$

Comme $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr = \frac{1}{2}\Gamma(p+q)$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}B(p,q)$ alors

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

(d) On a: $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$. Donc : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Partie II

---

1. (a) La fonction g est continue sauf peut-être en 0 et positive. De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \frac{\Gamma(p,\lambda)}{\Gamma(p)} = 1$. Donc g est la densité de probabilité d'une variable aléatoire U suivant la loi gamma $\gamma(p, \lambda)$.

(b) La loi $\gamma(1,\lambda)$ est la loi exponentielle de paramètre λ.

(c) Sous réserve de convergence, on a $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}x^p dx$. Il résulte de ce qui précède que, pour tout $p > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}x^{p-1}dx$ converge et vaut $\frac{\Gamma(p)}{\lambda^p}$. On en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}x^p dx$ converge et vaut $\frac{\Gamma(p+1)}{\lambda^{p+1}}$.
Ainsi $\mathbb{E}(X)$ existe et $\mathbb{E}(X) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)}\frac{\Gamma(p+1)}{\lambda^{p+1}} = \frac{\Gamma(p+1)}{\lambda\Gamma(p)} = \frac{p}{\lambda}$.
De même sous réserve de convergence, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}x^{p+1}dx$. Par le même raisonnement, $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}x^{p+1}dx$ converge et vaut $\frac{\Gamma(p+2)}{\lambda^{p+2}}$. Ainsi X possède un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)}\frac{\Gamma(p+2)}{\lambda^{p+2}} = \frac{\Gamma(p+2)}{\lambda^2\Gamma(p)} = \frac{p(p+1)}{\lambda^2}$. On en déduit que X possède une variance $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{p(p+1)}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2} = \frac{p}{\lambda^2}$.

---

2. (a) Les variables U_1 et U_2 étant positives, f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et d'après le rappel, on a, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^x e^{-\lambda t}t^{p-1}e^{-\lambda(x-t)}(x-t)^{q-1}dt \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}e^{-\lambda x}\int_0^x t^{p-1}(x-t)^{q-1}dt. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $u = \frac{t}{x}$. On obtient, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}e^{-\lambda x}\int_0^1 (xu)^{p-1}(x(1-t))^{q-1}xdu \\ &= \frac{\lambda^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}e^{-\lambda x}x^{p+q-1}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt. \end{aligned}$$

On remarque qu'en posant $c = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$, on a, pour tout $x > 0$, $f(x) = c\lambda^{p+q}x^{p+q-1}e^{-\lambda x}$ et pour tout $x \leq 0$, $f(x) = 0$). La fonction f est une densité de probabilité. On en déduit que $c = \frac{1}{\Gamma(p+q)}$ et $U_1 + U_2$ suit la loi $\gamma(p+q,\lambda)$.

(b) D'une part, $c = \frac{1}{\Gamma(p+q)}$.
D'autre part, $c = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{B(p,q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$. On retrouve donc la relation $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

3. (a) Cherchons sa fonction de répartition. La variable Z^2 est positive donc $F_{Z^2}(z) = 0$ si $z \leq 0$ et, pour $z > 0$,

$$F_{Z^2}(z) = \mathbb{P}(Z^2 \leq z) = \mathbb{P}(-\sqrt{z} \leq Z \leq \sqrt{z}) = \Phi(\sqrt{z}) - \Phi(-\sqrt{z}).$$

La fonction Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\varphi : x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. On obtient une densité f_{Z^2} de Z en dérivant F_{Z^2}. Pour $z \leq 0$, $\quad f_{Z^2}(z) = 0$ et pour $z > 0$,
$f_{Z^2}(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}(\varphi(\sqrt{z}) + \varphi(-\sqrt{z})) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} z^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}$.
La variable Z^2 suit donc la loi $\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(b) D'après la question (2a), la variable somme S de n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que la variable Z^2 suit une loi $\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
On a: $\mathbb{E}(S) = n \quad$ et $\quad \mathbb{V}(S) = 2n$.

Partie III

1. • $(t < T_1) =$ "le premier signal arrive après l'instant t"
$=$ "il n'y a pas de signaux entre les instants 0 et t" $= (N_t = 0)$
• $(N_t \geq n) =$ "il y a au moins n signaux qui sont arrivés entre les instants 0 et t"
$=$ "le $n^{ième}$ signal arrive à l'instant t ou avant" $= (T_n \leq t)$
• $(N_t = n) =$ "il y a exactement n signaux qui sont arrivés entre les instants 0 et t"
$=$ "le $n^{ième}$ signal arrive à l'instant t ou avant et le $(n+1)^{ième}$ aprés t"
$= (T_n \leq t, T_{n+1} > t) = (T_n \leq t < T_{n+1})$

2. (a) D'après la question (2a), la variable T_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\gamma(1, \lambda)$ suit une loi $\gamma(n, \lambda)$.

(b) $\mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(T_n \leq t) = \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx$

(c) • N_t est à valeurs dans $\mathbb{N}$
• $\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(t < T_1) = 1 - \mathbb{P}(T_1 \leq t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$
• Pour$n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(N_t \geq n) - \mathbb{P}(N_t \geq n+1) \\ &= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{\lambda^n}{n!} x^n e^{-\lambda x}\right]_0^t = \frac{(t\lambda)^n}{n!} e^{-\lambda}\end{aligned}$$

Donc N_t suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$

---

3. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.
Si $N_t = n$, il y a alors $n$épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p (le signal a été détecté par S). On compte alors le nombre de succès. D'où la loi conditionnelle de D_t sachant $(N_t = n)$ est la loi binomiale de paramètres n et p. Donc

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \quad \mathbb{P}(D_t = k | N_t = n) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{avec } q = 1 - p$$

(b) • D_t est à valeurs dans $\mathbb{N}$

• $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(D_t = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(D_t = k | N_t = n)\, \mathbb{P}(N_t = n)$ par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(N_t = n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_t = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^k q^{n-k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = \frac{p^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{q^{n-k} (\lambda t)^n}{(n-k)!} \\ &= \frac{(p\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

En posant le changement d'indice $m = n - k$, on reconnaît une série exponentielle :

$$\mathbb{P}(D_t = k) = \frac{(p\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda q t} = \frac{(p\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda p t}$$

Donc D_t suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p t)$, ainsi $\mathbb{E}(D_t) = \mathbb{V}(D_t) = \lambda p t$.
