REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2012

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2012

Concours Biologie et Géologie
Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 4 Juin 2012	**Heure :** 8 H	**Durée:** 3 heures	**Nb pages:** 4

Barème: **Partie I**: pts **Partie II:** pts **Partie III**: pts **Partie IV**: pts **Partie V**: pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

On dispose de 3 urnes contenant chacune un même nombre de boules de même nature. On désigne par $(\mathcal{E})$ l'expérience suivante:

"*Choisir de façon équiprobable une urne et effectuer un tirage d'une boule avec remise de cette urne.*"

On répète $(\mathcal{E})$ plusieurs fois et on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant le nombre des urnes de laquelle on a fait au moins un tirage dans l'une ou plusieurs des n premières répétitions. On note

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix},$$

où $\mathbb{P}(X_n = k)$ désigne la probabilité de l'événement $(X_n = k)$ pour $k = 1, 2, 3$.

1. Préciser la loi de X_1.
2. Établir, à l'aide de la formule des probabilités totales, que pour tout entier naturel non nul n,
$$U_{n+1} = AU_n, \text{ avec } A \text{ la matrice de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ définie par: } A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
3. (a) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable?
   (b) Déterminer la matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de $3^{ième}$ ligne $\ell_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et vérifiant la relation
$$P^{-1}AP = D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Calculer P^{-1}.

(d) Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n.

$$A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 & 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Déduire la loi de X_n pour tout entier naturel non nul n.

4. On définit la variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ par: $(Y \leqslant n)$ et $(X_n = 3)$.

(a) Préciser la probabilité de l'événement $(Y = 1)$ et $(Y = 2)$.

(b) Établir que: $\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

(c) i. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \mathbb{P}(Y = n)x^n$. On note g_Y sa somme.

ii. Montrer que l'expression de sa fonction somme est:

$$g_Y(x) = \frac{2x^3}{2x^2 - 9x + 9}.$$

iii. Déterminer la fonction dérivée g'_Y.

iv. En déduire la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(Y)$.

Problème

On désigne par p, q et λ trois réels strictement positifs et on définie les intégrales $\Gamma(p, \lambda)$ et $B(p, q)$ respectivement par:

$$\Gamma(p, \lambda) = \int_0^{+\infty} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$$

et

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1} dx.$$

Partie I

1. Montrer que chacune des intégrales $\Gamma(p, \lambda)$ et $B(p, q)$ convergent.

2. On note $\Gamma(p) = \Gamma(p, 1)$. En effectuant un changement de variable, montrer que $\Gamma(p, \lambda) = \Gamma(p)$.

3. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.
4. Montrer que si p est un entier naturel non nul, $\Gamma(p) = (p-1)!$.
5. (a) Montrer que

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2p-1} (\sin(\theta))^{2q-1}\, d\theta \quad \text{et} \quad \Gamma(p) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2p-1} du.$$

(**Ind.**: Pour la $1^{\text{ère}}$ intégrale, faire le changement de variable $x = \cos(\theta)$.)

(b) Soit le domaine $\mathcal{D} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\iint_D e^{-r^2} (r\cos(\theta))^{2p-1} (r\sin(\theta))^{2q-1} r\,dr\,d\theta.$$

(c) En déduire que $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

(d) Calculer $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, puis en déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Partie II

On définit la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que g est la densité de probabilité d'une variable aléatoire U.

   On dira dans la suite du problème qu'une telle variable aléatoire U suit la loi gamma $\gamma(p,\lambda)$.

   (b) Reconnaître la loi $\gamma(1,\lambda)$.

   (c) Montrer que la variable U admet une espérance et une variance et que:

$$\mathbb{E}(U) = \frac{p}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(U) = \frac{p}{\lambda^2}.$$

2. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(p,\lambda)$ et $\gamma(q,\lambda)$.

   On rappelle que pour g_1 et g_2 des densités de probabilité respectivement de U_1 et U_2, alors $U_1 + U_2$ admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_1(t) g_2(x-t)\, dt$.

   (a) Montrer que $U_1 + U_2$ suit la loi $\gamma(p+q,\lambda)$.
   (**Ind.**: faire le changement de variable $t = xu$)

   (b) Retrouver la relation $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

3. Soit Z une variable qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

   (a) Montrer que Z^2 suit la loi $\gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) Donner la loi de la somme S de n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que la variable Z^2.

Partie III

On s'intéresse aux instants de passages successifs des véhicules par un point donné M. Le 1^{er} véhicule passe à l'instant $\Delta_1 = T_1$. On note $\Delta_2 = T_2 - T_1$ le temps écoulé entre les passages du 1^{er} et du $2^{ème}$ véhicule, T_2 désigne l'instant auquel ce second véhicule arrive. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n l'instant ou le $n^{ième}$ véhicule arrive au point M et $\Delta_{n+1} = T_{n+1} - T_n$ le temps écoulé entre les passages du $n^{ième}$ et du $(n+1)^{ième}$ véhicule et on suppose que les variables $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendantes et qu'elles suivent la même loi exponentielle de paramètre λ.

On définit enfin la fonction N sur $\mathbb{R}_+$ par: $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$N_t = \text{ le nombre de véhicules qui sont passés dans l'intervalle } [0, t].$$

1. Justifier que $(N_t = 0) = (T_1 > t)$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(N_t \geqslant n) = (T_n \leqslant t) \quad \text{et} \quad (N_t = n) = (T_n \leqslant t < T_{n+1}).$$

2. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) En remarquant que, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k$, donner la loi de T_n.

   (b) Donner une expression de $\mathbb{P}(N_t \geqslant n)$ utilisant une intégrale.

   (c) Montrer que :
   $$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geqslant n) - \mathbb{P}(N_t \geqslant n+1)$$

   (d) En déduire que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.
   (**ind.**: On pourra intégrer par parties la quantité $\mathbb{P}(N_t \geqslant n+1)$).

3. On suppose que les véhicules passant par le point M n'ont que 2 directions D_1 et D_2. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on note $D_{1,t}$ le nombre de véhicules allant dans la direction D_1 qui sont passés entre l'instant 0 et l'instant t. Lorsqu'un véhicule passant par le point M, on suppose qu'il prenne la direction D_1 avec une probabilité $p \in]0,1[$, et la direction D_2 avec la probabilité $q = (1-p)$, indépendamment des autres véhicules.

   (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la loi de probabilité de la variable conditionnelle $(D_{1,t} \mid N_t = n)$ est égale à :
   $$\mathbb{P}(D_{1,t} \mid N_t = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad \forall k \in 0, ..., n,$$

   (b) En déduire la loi de $D_{1,t}$ ainsi que son espérance $\mathbb{E}(D_{1,t})$ et sa variance $\mathbb{V}(D_{1,t})$.