Correction du sujet Math 1(Maths-Physique): Session 2002

Partie I

1) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1-\alpha}{2}} f(x) = 0$ et $\dfrac{1-\alpha}{2} < 1$, donc f est intégrable au voisinage de 0.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$, donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

---

2)a) En étudiant l'application $t \to Log(1-t)+t$, on obtient l'inégalité.

---

b) En utilisant la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\ x \in \left]0,n\right]$,

$$Log\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = nLog\left(1-\frac{x}{n}\right) \leq -x.$$

Ce qui montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x>0$ on a $|f_n(x)| \leq |f(x)|$.

---

3) On a: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x > 0$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x>0$ on a $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ et f intégrable au voisinage sur $\left]0,+\infty\right[$, alors d'aprés le théorème de convergence dominée on a:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

---

4)a) En posant $u = 1-\dfrac{x}{n}$, on obtient:

$$\begin{aligned} I_n &= n\int_0^1 u^n Log\left(n\left(1-u\right)\right)du \\ &= \frac{n}{n+1}Logn + n\int_0^1 u^n Log\left(1-u\right)du. \end{aligned}$$

---

b) On a $Log\left(1-u\right) = -\sum\limits_{p\geq 1}\dfrac{u^p}{p}$, pour $|u|<1$.

Alors en utilisant le théorème de convergence monotone, on obtient:

$$\int_0^1 u^n Log\,(1-u)\,du = -\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p}\int_0^1 u^{p+n}du = -\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p\,(p+n+1)}.$$

---

c) On a:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u^n Log\,(1-u)\,du &= -\frac{1}{1+n}\lim_{N\to+\infty}\sum_{p=1}^{N}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+n+1}\right)\\
&= -\frac{1}{1+n}\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}-\sum_{p=n+2}^{N+n+1}\frac{1}{p}\right)\\
&= -\frac{1}{1+n}\left(\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p}-\lim_{N\to+\infty}\sum_{p=N+1}^{N+n+1}\frac{1}{p}\right)\\
&= -\frac{1}{1+n}\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p},
\end{aligned}$$

car $\frac{1}{1+n}\sum_{p=N+1}^{N+n+1}\frac{1}{p}\leq\frac{1}{N+n+1}$.

Ainsi

$$I_n = \frac{n}{n+1}Logn + n\int_0^1 u^n Log\,(1-u)\,du = \frac{n}{1+n}\left(Logn-\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p}\right).$$

---

5) D'aprés I-3), on a:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}Logx\;dx = \lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\left(Logn-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right).$$

---

6) On a: $\frac{1}{n}-Log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-Log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ converge. De plus,

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-Log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-Log\,(1+n)+Logn\right)$$
$$= \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-Log\,(1+N)\right).$$

C'est à dire la constante d'Euler $\gamma=\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-Log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

---

7)a) On a:

$$x^2\int_0^1\frac{t}{1+tx}dt = x\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+tx}\right)dt = x-Log\,(1+x).$$

---

b) Comme pour tout $t\in[0,1]$, on a:

$$\frac{t}{1+t}\leq\frac{t}{1+\frac{t}{n}}\leq t.$$

Il s'ensuit, d'aprés la question précédente, que pour tout $n\geq 1$, on a:

$$(1-Log2)\,\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n}-Log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\int_0^1\frac{t}{1+\frac{t}{n}}dt\leq\frac{1}{2n^2}.$$

---

c) Les inégalités sont triviales.

Partie II

1)a) En intégrant par parties, on a pour tout $x>0$,

$$\Gamma\,(x+1)=\left[t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma\,(x).$$

b) La fonction $x \longrightarrow t^{x-1}e^{-t}$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. De plus, si $0 < a < b$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\forall\ x \in [a,b]$ et $t \geq 0$ on a:

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(t^{x-1}e^{-t}\right)\right| = \left|t^{x-1}e^{-t}\left(Logt\right)^n\right| \leq \varphi_{a,b}(t),$$

où $\varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t}\left|Logt\right|^n & \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t}\left|Logt\right|^n & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$,qui est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Il en résulte, d'aprés le théorème de dérivation sous le signe intégral, que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que $\forall n \geq 1$ et $x > 0$, on a:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\left(Logt\right)^n dt.$$

---

c) On a $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}Logt\ dt = \gamma.$

---

2)a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\left(\Gamma'(x)\right)^2 &= \left(\int_0^{+\infty}\left(e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}Logt\right)dt\right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty}\left(e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}\right)^2 dt\right).\left(\int_0^{+\infty}\left(e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}Logt\right)^2 dt\right) \\ &= \Gamma(x).\Gamma''(x).\end{aligned}$$

---

b) D'aprés la question précédente, on a pour tout $x > 0$,

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(x) = \frac{\Gamma(x).\Gamma''(x) - \left(\Gamma'(x)\right)^2}{\left(\Gamma(x)\right)^2} \geq 0.$$

Donc la fonction Γ est logarithmiquement convexe sur $]0,+\infty[$.

3)a) Pour tout $x > 0$, on a:

$$\frac{g'(x+1)}{g(x+1)} = \frac{xg'(x)+g(x)}{xg(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{1}{x}.$$

---

b) Pour tout $x > 0$, on a:

$$h(x+1) = \frac{g(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{xg(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{g(x)}{\Gamma(x)} = h(x).$$

---

c) Pour tout $x > 0$, on a: $h(x+1) = h(x)$. En dérivant, on obtient $h'(x+1) = h(x), \forall x > 0$. C'est à dire, h' est 1-périodique.

---

4)a)Comme Γ et g sont logarithmiquement convexes, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \leq x < n+1$, on a:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \leq \frac{g'(n+1)}{g(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$$

Maintenant, en utilisant la question II-3)a) et le fait que h est 1-périodique, on obtient:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} \leq \frac{g'(n)}{g(n)} + \frac{1}{n} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \frac{h'(n)}{h(n)} + \frac{1}{n} = \frac{h'(1)}{h(1)} + \frac{1}{n}.$$

---

b) En utilisant le même raisonnement que précédement, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \leq x < n+1$, on a:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} \geq \frac{g'(n)}{g(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{h'(n)}{h(n)} - \frac{1}{n} = \frac{h'(1)}{h(1)} - \frac{1}{n}.$$

---

c) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \leq x < n+1$ on a:

$$\frac{h'(1)}{h(1)} - \frac{1}{n} \leq \frac{h'(x)}{h(x)} \leq \frac{h'(1)}{h(1)} + \frac{1}{n},$$

alors en faisant tendre x vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{h'(1)}{h(1)}$.

5)a) Soit $x > 0$, alors en utilisant que $\frac{h'}{h}$ est 1-périodique sur $]0, +\infty[$, on obtient:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{h'(x+n)}{h(x+n)} = \frac{h'(1)}{h(1)}.$$

C'est à dire, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $h'(x) = C.h(x)$, $\forall x > 0$.
Ce qui implique que $\forall x > 0$, $h(x) = K.e^{Cx}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
Comme h est 1-périodique sur $]0, +\infty[$, alors $C = 0$ et donc h est constante.

---

b) découle immédiatement de la question précedente.

---

6)a) En intégrant par parties, on a pour $x, y > 0$,

$$\begin{aligned} B(x+1, y) &= -\frac{1}{y}\left[t^x (1-t)^y\right]_0^1 + \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y \, dt \\ &= \frac{x}{y} B(x, y+1). \end{aligned}$$

---

b) Pour $x, y > 0$, on a:

$$\begin{aligned} B(x+1, y) + B(x, y+1) &= \int_0^1 ((1-t)+t)\, t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, dt \\ &= B(x, y). \end{aligned}$$

Donc, d'aprés la question précédente, on a:

$$B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1) = \frac{x}{y}\left(B(x,y) - B(x+1, y)\right).$$

Ainsi

$$B(x+1, y) = \frac{x}{y+x} B(x, y).$$

7)a) Pour $y > 0$ fixé, on pose $g(x) = B(x,y).\Gamma(x+y)$, alors en utilisant les propriétés des fonctions Γ et B, on a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x+1) &= B(x+1,y).\Gamma(x+y+1) \\ &= \frac{x}{y+x} B(x,y).(x+y)\,\Gamma(x+y) \\ &= xg(x). \end{aligned}$$

C'est à dire que g vérifie (*). De plus, on a:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} B(x,y)}{B(x,y)} + \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}.$$

D'aprés II-2), Γ est logarithmiquement convexe sur $]0,+\infty[$. De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy Shawartz, on montre d'une maniére analogue que l'application $x \to B(x,y)$ est logarithmiquement convexe sur $]0,+\infty[$. Il en résulte que g est logarithmiquement convexe sur $]0,+\infty[$.

---

b) Comme g est logarithmiquement convexe sur $]0,+\infty[$ vérifiant (*), alors d'aprés la question II-5), on a $g(x) = g(1)\Gamma(x), \forall x > 0$.
Or,

$$g(1) = B(1,y)\Gamma(y+1) = y\Gamma(y) \int_0^1 (1-t)^{y-1}\,dt = \Gamma(y).$$

Donc on a:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \forall x,y > 0.$$

---

c) En prenant $x = y = \dfrac{1}{2}$ dans l'égalité précédente, on a:

$$\begin{aligned} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \Gamma(1)\,B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}ds \\ &= 2Arcsin1 = \pi. \end{aligned}$$

Donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

---

8)a) On pose $g(x) = 2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$, pour $x > 0$.

On a g vérifie (*). En effet, pour tout $x > 0$ on a:

$$\begin{aligned} g(x+1) &= 2^x\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right) \\ &= 2^x\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).\frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= xg(x). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x > 0$, on a:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = Log2 + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)}.$$

Comme Γ est logarithmiquement convexe sur $]0,+\infty[$, alors g l'est aussi.

---

b) D'aprés II-5), on a pour tout $x > 0$,

$$g(x) = 2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = g(1)\Gamma(x).$$

C'est à dire:

$$g(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)\Gamma(x) = \sqrt{\pi}\Gamma(x), \forall x > 0.$$

---

9)a) En appliquant la fonction Log à l'égalité suivante:

$$2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(x),$$

puis, en intégrant entre 0 et 1, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_0^1 Log\Gamma(t)dt + Log\sqrt{\pi} &= Log2\int_0^1 (t-1)\,dt + \int_0^1 Log\Gamma(\frac{t}{2})dt + \int_0^1 Log\Gamma(\frac{t+1}{2})dt \\ &= -\frac{1}{2}Log2 + 2\int_0^1 Log\Gamma(t)dt. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\int_0^1 Log\Gamma(t)dt = Log\sqrt{2\pi}$.

---

b) On pose pour $x > 0$, $v(x) = \int_x^{x+1} Log\Gamma(t)dt - xLogx + x$.
Alors on a pour $x > 0$,

$$v'(x) = Log\left(\frac{\Gamma(x+1)}{x\Gamma(x)}\right) = 0.$$

Donc pour tout $x > 0$, on a: $v(x) = \lim_{t\to 0} v(t) = \int_0^1 Log\Gamma(t)dt = Log\sqrt{2\pi}$. Ce qui donne le résultat.

Partie III

1)a) L'égalité est triviale.

---

b) Soit $u_n(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}$, pour $x > 0$. La fonction $x \to u_n(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} \left|u_n'(x)\right| = \sup_{x\in]0,+\infty[} \frac{1}{(n+x)^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors $\sum u_n'$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$. Ce qui montre que $u = \sum u_n$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que
$u'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+x)^2}$, pour $x > 0$.

---

c) · On a: $xu(x) = x(x-1)\left[\frac{1}{x} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)(n+x)}\right]$, pour $x > 0$.
Comme $\frac{1}{(n+1)(n+x)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} < +\infty$, alors $\lim_{x\to 0^+} xu(x) = -1$.

· Comme $u'(x) \geq 0$, alors u est croissante et positive sur $[1, +\infty[$. Donc $\lim_{x\to+\infty} u(x)$ existe au sens large.
Soit N un entier fixé et $x > 1$, alors on a:

$$u(x) \geq \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}\right).$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1}$$

Maintenant, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$.

· Comme pour $x > 0$, on a:

$$|u'(x)| \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^{3/2}}$$

et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^{3/2}} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} u'(x) = 0$.

---

2)a) Pour tout $x > 0$, on a:

$$\begin{aligned} u(x+1) - u(x) &= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right) \\ &= \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{N+x+1} \right) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

---

b) Comme $\sum u_n$ converge normalement sur $[1, 2]$, alors on a:

$$\begin{aligned} \int_1^2 u(t)dt &= \sum_{n \geq 0} \int_1^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+t} \right) dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[\frac{1}{n+1} - Log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \right] = \gamma. \end{aligned}$$

---

c) Soit $h(x) = \int_x^{x+1} u(t)dt$, pour $x > 0$. Alors on a:

$$h'(x) = u(x+1) - u(x) = \frac{1}{x}.$$

Il en résulte que pour tout $x > 0$,

$$h(x) = Logx + h(1) = Logx + \int_1^2 u(t)dt = Logx + \gamma.$$

3) Soit $g(x) = \exp\left(\int_1^x (u(t) - \gamma)\, dt\right)$,pour $x > 0$. Alors g vérifie (*). En effet, d'aprés la question précédente, on a pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x+1) &= g(x).\exp\left(\int_x^{x+1} (u(t)-\gamma)\, dt\right) \\ &= g(x).\exp\left(Logx + \gamma - \gamma\right) \\ &= xg(x). \end{aligned}$$

De plus, $\left(\frac{g'}{g}\right)'(x) = u'(x) \geq 0, \forall x > 0$. Donc g est logarithmiquement convexe sur $]0, +\infty[$. Ainsi, d'aprés II-5), on a pour tout $x > 0$, $g(x) = g(1).\Gamma(x) = \Gamma(x)$. Ce qui donne (i).
L'égalité (ii) est facile à vérifier.