RÉPUBLIQUE TUNISIENNE

***

Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2002

Concours en Mathématiques et Physique

Épreuve de Mathématiques II

Durée : 3H	Date : 8 Juin 2002	8H	Nb pages : 4
Barème :	Partie I : 5pts	Partie II : 7pts,	Partie III : 8pts

L'usage des calculatrices est strictement interdit.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Pour la suite E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique $(e_1, \ldots e_n)$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle\ ,\ \rangle$. Si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. On notera $\|\ \|$ la norme sur E associée à ce produit scalaire. $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note u^* l'adjoint de u relativement au produit scalaire de E. Un endomorphisme u de E est dit <u>symétrique</u> ou <u>autoadjoint</u> si $u = u^*$. Un endomorphisme u de E est dit <u>normal</u> si $u \circ u^* = u^* \circ u$ et un endomorphisme u de E est dit <u>antisymétrique</u> si $u^* = -u$. Id désigne l'application identité de E. On rappelle que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.

Partie I

Soit F un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et soit $u \in \mathcal{L}(F)$, avec $\mathcal{L}(F)$ l'algèbre des endomorphismes de F. On définit l'application $\varphi_u : \mathcal{L}(F) \longrightarrow \mathcal{L}(F)$ par : $\varphi_u(v) = uv - vu$, avec la convention $uv = u \circ v$.

1. (a) Démontrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que si $v \in \operatorname{Ker}\varphi_u$, alors $v^m \in \operatorname{Ker}\varphi_u$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire que si $v \in \operatorname{Ker}\varphi_u$, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(v) \in \operatorname{Ker}\varphi_u$.

2. Soient u et $v \in \mathcal{L}(F)$. Montrer que $v \in \operatorname{Ker}\varphi_u \iff u \in \operatorname{Ker}\varphi_v$ et en déduire que si

$v \in \operatorname{Ker} \varphi_u$, alors pour tous polynômes P, Q de $\mathbb{R}[X]$

$$P(v)Q(u) = Q(u)P(v) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} Q(u) \text{ est stable par } P(v).$$

3. Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $u^* = P(u)$. Vérifier que u est normal. (On rappelle que si $P \in \mathbb{R}[X]$, $(P(u))^* = P(u^*)$).
4. Soit u un endomorphisme normal de E.
   (a) Déduire de ce qui précède que pour tous polynômes P, Q de $\mathbb{R}[X]$, $P(u)Q(u^*) = Q(u^*)P(u)$ et que $P(u)$ est un endomorphisme normal.
   (b) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|u^*(x)\| = \|u(x)\|$ et en déduire que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^* = \operatorname{Ker} u^*u$ et $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\operatorname{Ker} P^m(u) = \operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} P(u^*)$.
   (d) Caractériser les endomorphismes normaux et nilpotents de E.

Partie II

Dans cette partie on suppose que E est de dimension 2. On se donne $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E.

A)

1. Montrer qu'un endomorphisme v de E est antisymétrique si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\langle v(x), x \rangle = 0$.
2. Soit v un endomorphisme antisymétrique non nul de E.
   (a) Montrer que la matrice de v dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix}$, avec $w \neq 0$ et en déduire que $v^2 = -w^2 \operatorname{Id}$.
   (b) Soit e un vecteur de E de norme 1.
   Montrer que $(e, \frac{1}{|w|}v(e))$ est une base orthonormée de E et retrouver la matrice de v dans cette base.

Soit u un endomorphisme de E et $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$, avec α, β, γ et δ des nombres réels.

3. Montrer que u est normal si, et seulement si, $(\beta - \gamma)(\beta + \gamma) = 0$ et $(\beta - \gamma)(\alpha - \delta) = 0$.
4. En déduire que
   (a) si $\beta = \gamma$, alors u est symétrique.
   (b) si $\beta \neq \gamma$, alors u n'admet pas de valeurs propres réelles et il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $A = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

B) On se propose de retrouver les résultats précédents d'une autre manière.

Soit u un endomorphisme normal et soit P_u son polynôme caractéristique.

1. On suppose que P_u est scindé sur $\mathbb{R}$.
Montrer u est symétrique. (**On pourra montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ et utiliser le fait que u est normal**).

2. On suppose que P_u n'admet pas de racines réelles.
   (a) Montrer qu'il existe un unique couple (α, β) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $P_u(x) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$ et en déduire que u est inversible.
   (b) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $(x, u(x))$ est une base de E et en déduire que si $F \neq \{0\}$ est un sous-espace de E, stable par u, alors $F = E$.
   (c) Montrer que l'endomorphisme $u + u^*$ admet au moins une valeur propre réelle.
   (d) Soit λ une valeur propre de $u + u^*$. Montrer que le sous-espace propre de $u + u^*$ associé à λ est stable par u et en déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u + u^* = 2\mu \operatorname{Id}$.

3. (a) Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $(u - u^*)^2 = -4\gamma^2 \operatorname{Id}$. (**On pourra utiliser les résultats de la partie II) A)**).
   (b) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} \mu & -\gamma \\ \gamma & \mu \end{pmatrix}$.
   (c) Déduire de ce qui précède qu'il existe $r > 0$ tel que $\frac{1}{r}u$ soit une rotation.

Partie III

Dans cette partie on suppose que E est de dimension $n \geq 3$. On se propose de montrer que si un endomorphisme u de E est normal, alors il existe un polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $u^* = T(u)$. Pour la suite de cette partie u est un endomorphisme normal de E. On note P_u son polynôme caractéristique.

1. Soient Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ premiers entre-eux.
   (a) Montrer que $R(u)$ laisse stable $\operatorname{Ker} Q(u)$ et que la restriction de $R(u)$ à $\operatorname{Ker} Q(u)$ est injective. (**On pourra utiliser l'identité de Bezout**).
   (b) En déduire que $R(u)(\operatorname{Ker} Q(u)) = \operatorname{Ker} Q(u)$ et que les deux sous-espaces $\operatorname{Ker} Q(u)$ et $\operatorname{Ker} R(u)$ sont orthogonaux.

2. On suppose dans cette question que le polynôme caractéristique P_u de l'endomorphisme u s'écrit sous la forme $P_u(X) = Q_1^{m_1} Q_2^{m_2}(X)$, avec Q_1 et Q_2 deux polynômes premiers entre-eux et irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. ($\deg Q_1 \leq 2$ et $\deg Q_2 \leq 2$).
   (a) Montrer que
   $$E = \operatorname{Ker} Q_1(u) \oplus \operatorname{Ker} Q_2(u)$$
   (Il s'agit d'une somme directe de sous-espaces orthogonaux).
   (b) En déduire que si $\deg Q_1 = 1$ et $\deg Q_2 = 1$, alors u est diagonalisable et symétrique.

(c) On suppose que $Q_2(X) = X^2 + aX + b$, avec a et b deux réels.

i) On suppose qu'il existe un vecteur non nul $e \in \operatorname{Ker} Q_2(u)$ tel que $u(e) = u^*(e)$. Montrer que le sous espace F engendré par e et $u(e)$ est stable par u et que $u^* = u$ sur F.

ii) En déduire que la restriction de $u - u^*$ sur $\operatorname{Ker} Q_2(u)$ est injective et que pour tout $x \in \operatorname{Ker} Q_2(u)$, $u^*(x) = -u(x) - ax$. (On rappelle que $\operatorname{Ker} Q_2(u) = \operatorname{Ker} Q_2(u^*)$).

(d) En utilisant l'identité de Bezout, montrer qu'il existe deux polynômes S_1 et S_2 de $\mathbb{R}[X]$ tels que les endomorphismes $p_1 = S_1(u)$ et $p_2 = S_2(u)$ soient deux projecteurs vérifiant : $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$, $p_1(E) = \operatorname{Ker} Q_1(u)$ et $p_2(E) = \operatorname{Ker} Q_2(u)$.

(e) En déduire qu'il existe un polynôme T tel que $u^* = T(u)$.

3. On se donne l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que u est normal.

(b) Donner le polynôme caractéristique P_u de u. $(1-x)(x^2+1)$

(c) En suivant la démarche de la question précédente, donner un polynôme T de $\mathbb{R}[X]$ tel que $u^* = T(u)$.

4. Pour le cas général, soit $P_u(X) = \prod_{j=1}^{k} Q_j^{m_j}(X)$ la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme caractéristique P_u de l'endomorphisme u.

(a) Montrer que

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leq j \leq k}} \operatorname{Ker} Q_j(u)$$

(Il s'agit d'une somme directe de sous-espaces deux à deux orthogonaux).

(b) En déduire que si P_u est scindé, alors u est diagonalisable et donc symétrique.

(c) Déduire de ce qui précède qu'il existe un polynôme T tel que $u^* = T(u)$.