



Concours Mathématiques-Physique et Physique-Chimie  
Epreuve de Sciences et Techniques de l'Ingénieur

Date : Vendredi 07 juin 2002    Heure : 8 H    Durée : 3 H    Nombre de pages : 9

Barème :    Partie A : 11 pts    Partie B : 3 pts    Partie C : 6 pts

Remarques :

- 1/ Les parties A, B et C sont indépendantes et doivent être rédigées sur des feuilles séparées.
- 2/ Les documents réponses 5/9 et 6/9 sont à rendre en fin d'épreuve

**MECANISME D'ANTENNE PARABOLIQUE**

**Présentation**

La figure 1 représente le schéma cinématique simplifié du mécanisme d'entraînement d'une antenne parabolique de réception télévisée. Les principaux éléments de l'ensemble sont :

- support fixe (0)
- réflecteur parabolique (1)
- vérin électrique (VE)

Le vérin (VE) est constitué d'un moteur électrique (M) à courant continu solidaire du corps (2) et d'un équipage mobile. Ce dernier est formé essentiellement de la tige (3) et des deux pignons (4) et (5) à denture droite.

**Principe de fonctionnement**

La rotation imposée par le moteur (M) est transmise par l'intermédiaire du pignon (5) au pignon (4). La rotation du pignon (4) est transformée, grâce à la liaison hélicoïdale entre (3) et (4) en une translation, par rapport à (2), de la tige (3). Le réflecteur (1) se trouve ainsi soumis à l'action de la tige (3). Cette action provoque la rotation EST/OUEST, autour de l'axe fixe  $\vec{A, Z_0}$ , du réflecteur (1).

**Repères et paramétrage**

Les repères et les paramètres adoptés se présentent comme suit :

- $R_0(A, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$  repère lié au support (0) supposé galiléen ;
- Le réflecteur parabolique (1), lié au repère  $R_1(A, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_0)$ , est en liaison pivot d'axe  $\vec{A, Z_0}$  avec le support (0), on donne  $\theta = (\vec{X}_0, \vec{X}_1) = (\vec{Y}_0, \vec{Y}_1)$ .



• Le corps de vérin (2), lié au repère  $R_2(C, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_0)$ , est en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{Z}_0)$  avec le support (0), on donne  $\varphi = (\vec{X}_0, \vec{X}_2) = (\vec{Y}_0, \vec{Y}_2)$ .

• Le pignon (4), lié au repère  $R_4(K, \vec{X}_2, \vec{Y}_4, \vec{Z}_4)$ , est en liaison pivot d'axe  $(K, \vec{X}_2)$  avec le corps de vérin (2), on donne  $\psi = (\vec{Y}_2, \vec{Y}_4) = (\vec{Z}_0, \vec{Z}_4)$ .

• Le pignon (5), lié au repère  $R_5(Q, \vec{X}_2, \vec{Y}_5, \vec{Z}_5)$ , est en liaison pivot d'axe  $(Q, \vec{X}_2)$  avec le corps de vérin (2), on donne  $\beta = (\vec{Y}_2, \vec{Y}_5) = (\vec{Z}_0, \vec{Z}_5)$ .

Les caractéristiques géométriques du mécanisme sont telles que :

$$\vec{AB} = a\vec{Y}_1, \vec{CD} = b\vec{Y}_2, \vec{DB} = \lambda\vec{X}_2$$

Les angles  $\varphi$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  et  $\psi$  sont les paramètres de rotation du mécanisme,  $\lambda$  est le seul paramètre de translation. Les données qui caractérisent les dimensions du système sont  $a$ ,  $b$ ,  $R_4$  (rayon du pignon (4)),  $R_5$  (rayon du pignon (5)) et  $p$  (pas de la tige filetée (3)).

### Partie A : ETUDE MECANIQUE

La masse du réflecteur (1) est  $m$ , son centre de masse  $G$  est tel que  $\vec{AG} = a_G\vec{X}_1$ , sa matrice

d'inertie centrale est définie par : 
$$[I_G(I)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{bmatrix}_{(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_0)}$$

Pour simplifier les calculs, on supposera négligeables les masses et les inerties des éléments constitutifs du vérin (VE) : (2, 3, 4, 5, moteur M)

### Partie A-I : CINEMATIQUE

I-1. Exprimer les torseurs cinématiques par rapport à  $R_0(A, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$  du réflecteur (1) au point A et du corps du vérin (2) au point C.

I-2 Calculer alors les vecteurs vitesses suivants :

2.a/  $\vec{V}(B/R_0)$ , en passant par A, l'exprimer dans la base  $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ ;

2.b/  $\vec{V}(B/R_0)$ , en passant par C, l'exprimer dans la base  $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ ;

I-3. En déduire les relations scalaires entre les différents paramètres.

I-4. Déterminer  $\dot{\lambda}$ , en fonction de  $\dot{\theta}$ ,  $\lambda$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $a$  et  $b$ .

I-5. Ecrire la condition de roulement sans glissement en I entre le pignon (5) et le pignon (4).

En déduire la relation entre  $\dot{\psi}$  et  $\dot{\beta}$ .

I-6. Sachant que  $\vec{\Omega}_{3/2} = \vec{0}$  ; exprimer, en fonction de  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\psi}$  , le torseur cinématique de (3) par rapport à (4) au point D.

I-7. Ecrire la relation entre  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\psi}$  . En déduire la relation entre  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\beta}$  ainsi que celle qui relie  $\lambda$  à  $\beta$  , sachant qu'à  $\beta=0$  on a  $\lambda=0$  .

I-8. Donner alors la loi entrée sortie du mécanisme:  $\dot{\theta} = f(\dot{\beta})$

### Partie A-II : ENERGETIQUE

Dans cette étude on admettra que toutes les liaisons sont parfaites sauf la liaison de (3) avec (4). L'action du moteur (M) sur le pignon (5) est un couple  $\vec{C}_M = C_M \vec{X}_2$ .

L'action de (3) sur (4) est représentée par le torseur :

$$\left\{ \mathcal{T}_{4/3} \right\}_D = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{4/3} = X_{43} \vec{X}_2 + Y_{43} \vec{Y}_2 + Z_{43} \vec{Z}_0 \\ \vec{M}_{D(4/3)} = L_{43} \vec{X}_2 + M_{43} \vec{Y}_2 + N_{43} \vec{Z}_0 \end{array} \right\}$$

l'accélération de la pesanteur est exprimée par  $\vec{g} = -g(\sin \alpha \vec{X}_0 + \cos \alpha \vec{Z}_0)$  où  $\alpha$  est une inclinaison constante par rapport à la verticale.

On considère le système  $\Sigma$  formé par les éléments {1,2,3,4,5 et le moteur M}

II-1. Donner les torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées à  $\Sigma$  . Préciser, pour chacune de ces actions, le point d'application et la base de projection .

II-2. Donner les torseurs des actions mécaniques intérieures à  $\Sigma$  . Préciser, pour chacune de ces actions, le point d'application et la base de projection .

II-3. Calculer la puissance développée par toutes les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $R_0(A, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ .

II-4. Calculer la puissance développée par toutes les actions mécaniques intérieures appliquées à  $\Sigma$  .

II-5. Calculer l'énergie cinétique de  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $R_0(A, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ .

II-6. Trouver la relation qui découle du théorème de l'énergie cinétique appliqué à  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $R_0(A, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ .

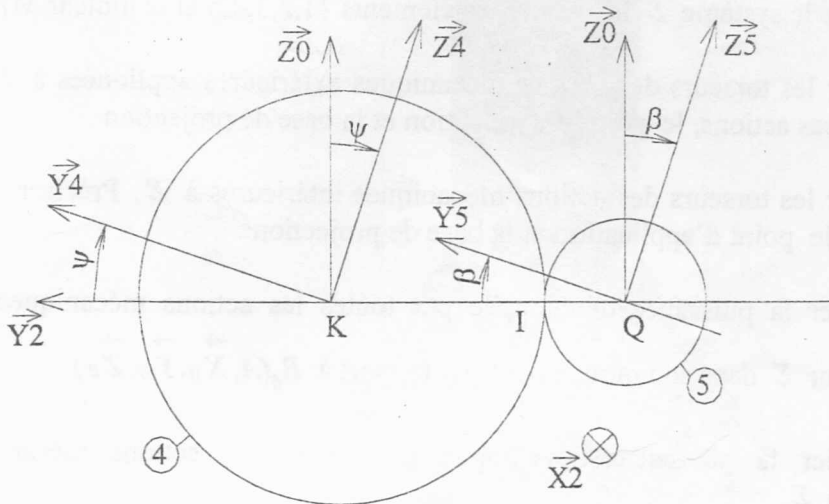
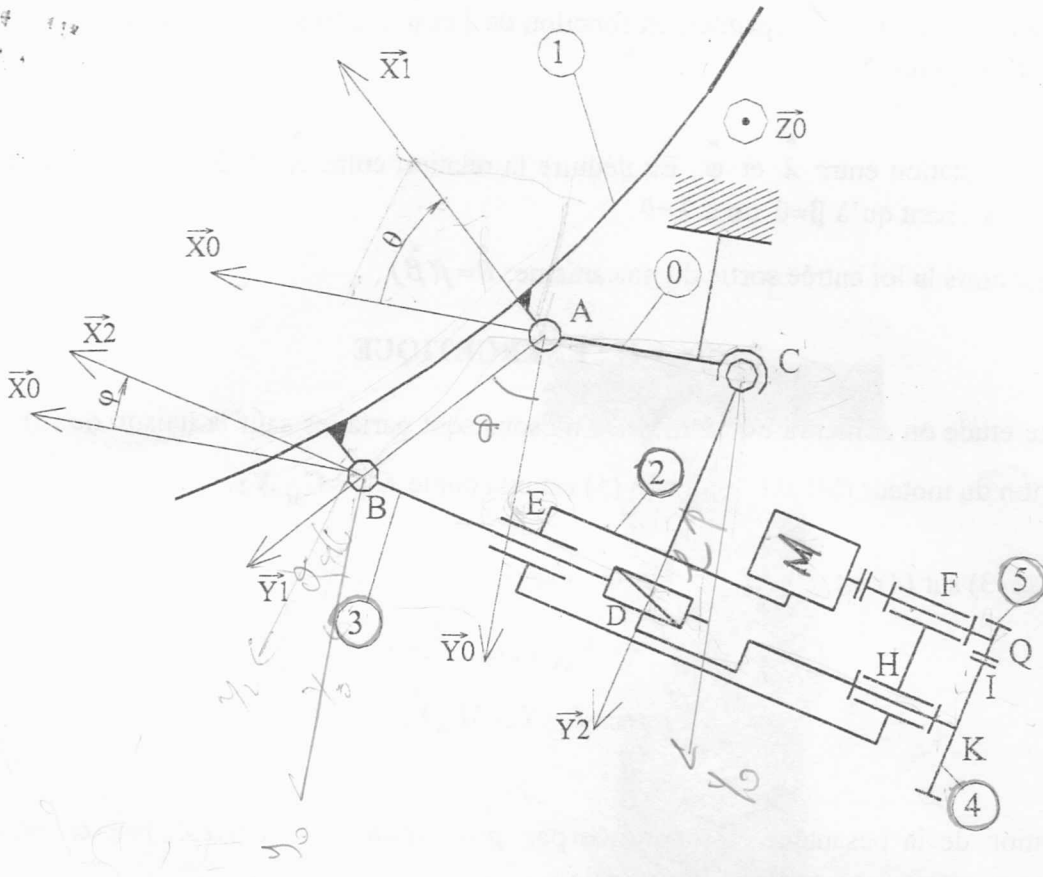


Figure 1 : Schéma cinématique du mécanisme

Nom : ..... Prénom : .....

Identification :  Série :

### Partie B : TECHNOLOGIE DE CONCEPTION

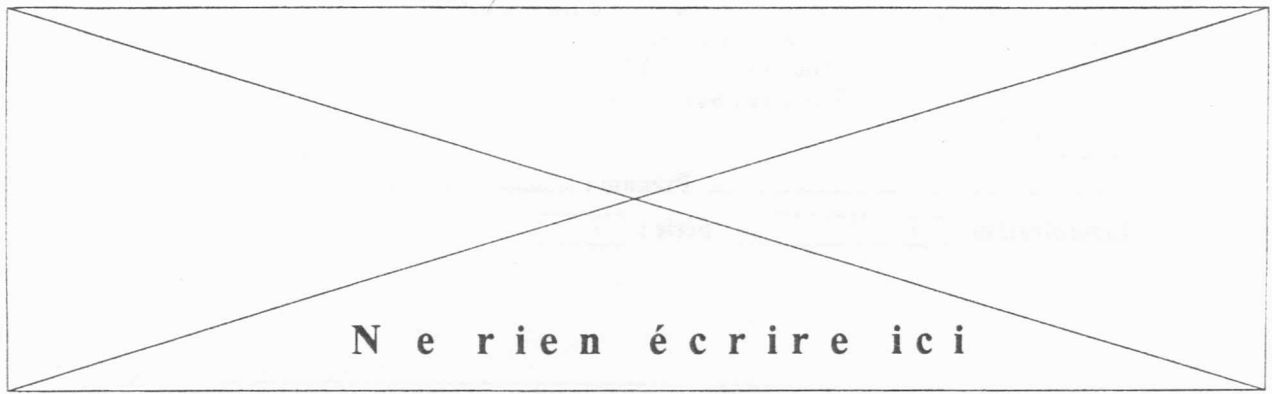
1. Quelle est la nature des liaisons suivantes :

(3) avec (2) .....

(3) avec (1) .....

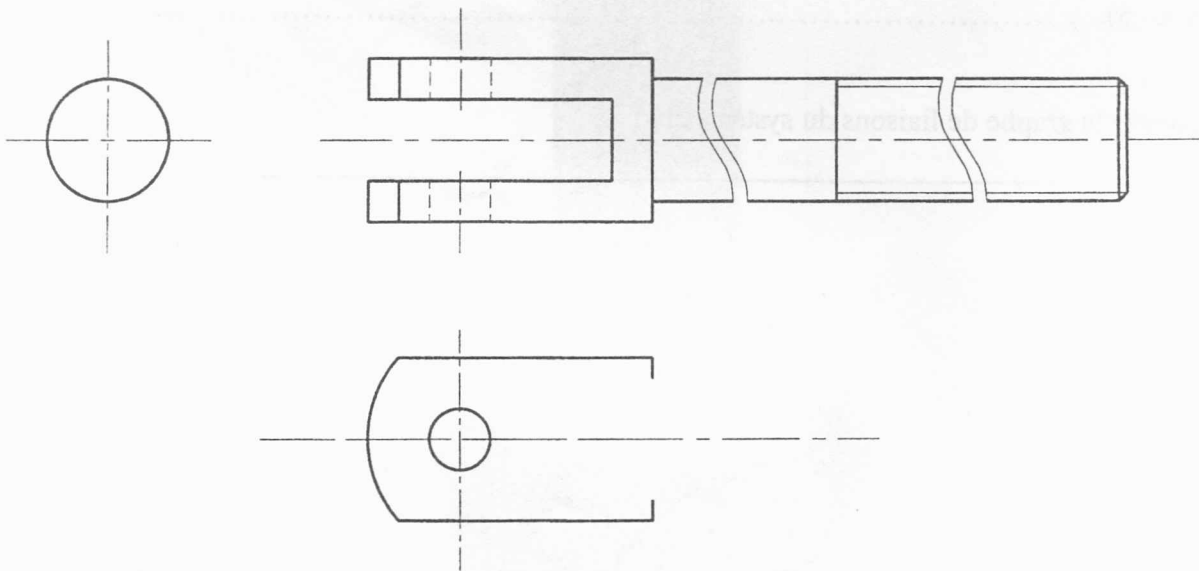
(4) avec (5) .....

2. Représenter le graphe de liaisons du système étudié.



3. Compléter, le dessin de définition de la tige (3) par :

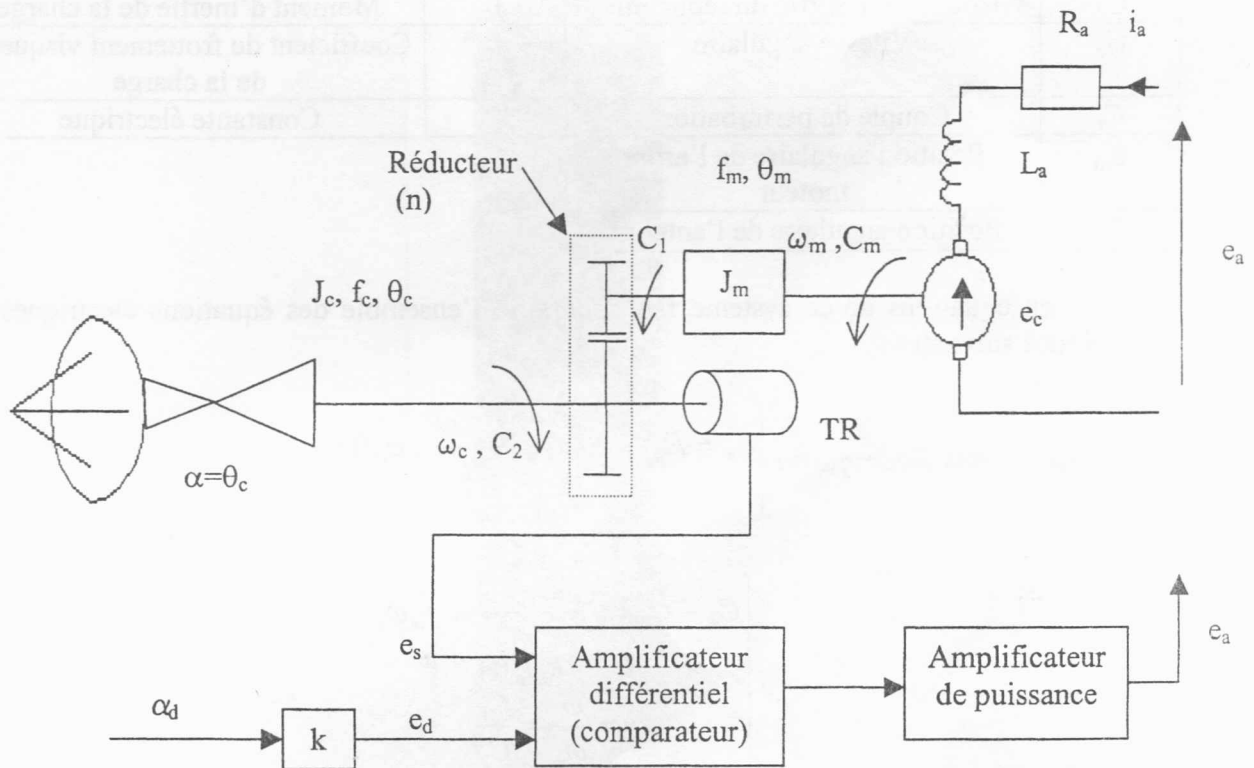
- la vue de face
- la vue droite
- la vue de dessus



## Partie C :AUTOMATIQUE

Dans cette partie, on se propose de mettre en œuvre une régulation de la position de l'antenne parabolique. On présente, à la figure (2), le schéma technologique simplifié du système de réglage.

L'antenne repose sur un plateau tournant entraîné par un moteur électrique à courant continu par l'intermédiaire d'un réducteur de rapport  $n$ . L'angle de rotation de l'antenne est mesuré par un transformateur différentiel (TR) à réluctance variable de type rotatif de gain  $k$ . Ce dernier, transforme l'angle de rotation  $\alpha$  en un signal électrique  $e_s$ , qui sera transmis à un amplificateur différentiel pour être comparé à un signal de référence  $e_d$  produit par un potentiomètre gradué en degrés. Ce signal est proportionnel à l'angle désiré  $\alpha_d$  (c.à.d.  $e_d = k \cdot \alpha_d$ ). Le signal d'erreur  $e$  entre les signaux  $e_d$  et  $e_s$ , est ensuite amplifié en puissance par un gain  $A$  pour pouvoir commander le moteur qui actionnera le mouvement de l'antenne.



**Figure 2 : Schéma technologique du système de réglage.**

Liste des variables		Liste des paramètres	
$e_a$	Tension d'alimentation	$R_a$	Résistance de l'induit
$i_a$	Courant absorbé par le moteur	$L_a$	Inductance de l'induit
$e_c$	Force contre électromotrice	$K_m$	Constante du couple
$C_m$	Couple moteur	$J_m$	Moment d'inertie de la partie tournante sur l'arbre du moteur
$\omega_m$	Vitesse angulaire de l'arbre moteur	$f_m$	Coefficient de frottement visqueux entre les paliers et l'arbre du moteur
$C_1$	Couple transmis à l'entrée de l'étage de réduction	$n$	Rapport de réduction du réducteur
$C_2$	Couple à la sortie du réducteur	$J_c$	Moment d'inertie de la charge
$\omega_c$	Vitesse angulaire	$f_c$	Coefficient de frottement visqueux de la charge
$C_r$	Couple de perturbation	$K_e$	Constante électrique
$\theta_m$	Position angulaire de l'arbre moteur		
$\theta_c$	Position angulaire de l'antenne		

La mise en équations de ce système fait apparaître l'ensemble des équations électriques et mécaniques suivantes :

$$- \text{ Equations électriques : } \begin{cases} e_a = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_c(t) \\ e_c(t) = k_e \omega_m(t) \end{cases}$$

$$- \text{ Equations mécaniques : } \begin{cases} C_m - C_1 = J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_m \omega_m \\ C_m = k_m i_a(t) \\ n = \frac{\omega_c}{\omega_m} = \frac{C_1}{C_2} \\ C_2 - C_1 = J_c \frac{d\omega_c(t)}{dt} + f_c \omega_c \\ \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m \\ \frac{d\theta_c(t)}{dt} = \omega_c \end{cases}$$

### Partie C-I : MODELISATION DU MOTEUR

I-1. Montrer que les équations mécaniques peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$C_m - nC_r = J_e \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_e \omega_m(t)$$

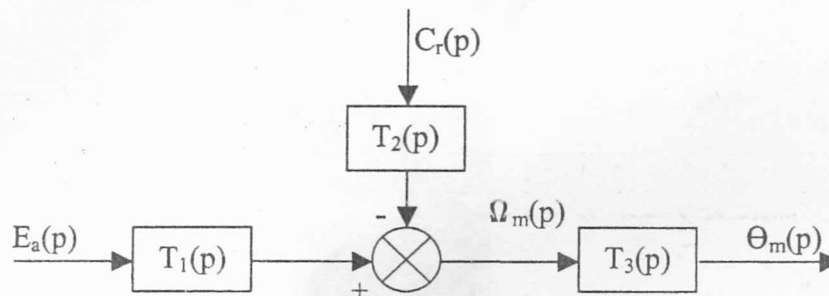


avec  $J_e = J_m + n^2 J_c$  : moment d'inertie équivalent ramené sur l'arbre du moteur,  
 et  $f_e = f_m + n^2 f_c$  : coefficient de frottement visqueux équivalent ramené sur l'arbre du moteur.

I-2. En appliquant la transformée de Laplace aux équations électriques et mécaniques et en considérant que les conditions initiales sont nulles, établir le schéma fonctionnel de ce système.

Il faut prendre comme grandeur d'entrée la tension d'alimentation  $e_a$ , grandeur de sortie la position angulaire  $\theta_m$  et grandeur de perturbation le couple  $C_r$ .

I-3. Montrer que le schéma fonctionnel peut être mis sous la forme suivante :



En déduire les expressions des fonctions de transfert  $T_1(p)$ ,  $T_2(p)$  et  $T_3(p)$ .

I-4. Etablir les expressions du gain statique, du coefficient d'amortissement et de la pulsation propre non amortie de la fonction de transfert  $T_1(p)$ .

En déduire les valeurs de ces paramètres.

**Application numérique :**  $R_a = 1,2 \text{ Ohm}$  ;  $L_a = 3 \cdot 10^{-3} \text{ H}$  ;  $k_e = 0,3 \text{ V/rd.s}^{-1}$  ;  $k_m = 0,3 \text{ m.N/A}$   
 $f_e = 10^{-3} \text{ N.m/rd.s}^{-1}$  ;  $J_e = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Kg.m}^2$  ;  $n = 0,1$  ;  $k = 0,1 \text{ V/rd}$

### Partie C-II : ETUDE DU SYSTEME EN BOUCLE FERMEE

II-1. Etablir le schéma fonctionnel du système de régulation de l'angle  $\alpha$  (entrée  $\alpha_d$  ; sortie  $\alpha$ ).

Dans ce qui suit on considère que le couple résistant est nul

II-2. Déterminer les valeurs de  $A$  qui assurent la stabilité du système en boucle fermée.

II-3. Dans la suite, on néglige l'inductance de l'induit du moteur :

3.a/ Déterminer la valeur de  $A$  pour avoir un dépassement du système en boucle fermée égal à 9%.

3.a/ Pour cette dernière valeur de  $A$  et une entrée  $\alpha_d(p) = 0,3/p^2$ , déterminer l'erreur ( $\epsilon = \alpha_d - \alpha$ ) en régime permanent. En déduire les valeurs d'équilibre des grandeurs physiques en présence.