

Correction du sujet Math 1(Maths-Physique):
Session: Juin 2003

Exercice

1) a) La fonction g est continue sur \mathbb{R} , paire et 2π -périodique, donc $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

De plus, un calcul direct donne $a_0 = \frac{\pi^2}{6}$ et $a_n = -\frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Donc la série de Fourier de g est donnée par:

⑤

$$Sg(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

1,5

0,5 + 1

1

b) D'après le théorème de Dirichlet, on a pour $x \in [0, 2\pi]$

$$g(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

1,5

Ce qui donne que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n \geq 1} \frac{1 - 2 \sin^2 nx}{n^2} = x(\pi - x).$$

1

④

En remarquant qu' en prenant $x = 0$, on obtient $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et par conséquent:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 nx}{n^2} = \frac{x(\pi - x)}{2}, \forall x \in [0, \pi].$$

1,5

2) D'après la question précédente, on a pour $x \in]0, \pi]$,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 nx}{n^2} = \frac{\pi - x}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

③

1

Soit $x > 0$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in]k\pi, (k+1)\pi]$. Donc on a:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 nx}{n^2 x} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n(x - k\pi)}{n^2(x - k\pi)} \leq \frac{\pi}{2}. \quad 2$$

3) a) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $p < q$ et $x > 0$, alors d'après la question précédente on a:

$$\textcircled{1,5} \quad \sum_{n=p}^q |u_n(x)| \leq \sup_{n \geq p} |\alpha_n| \cdot \sum_{n=p}^q \frac{\sin^2 nx}{n^2 x} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \sup_{n \geq p} |\alpha_n|.$$

b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p$, on a $|\alpha_n| \leq \varepsilon$.
D'où pour $q > p$, on a:

$$\sum_{n=p}^q |u_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \sup_{n \geq p} |\alpha_n| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \varepsilon. \quad 1,5$$

④

Ce qui montre que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément vers une fonction continue sur \mathbb{R}^+ . 1,5

Maintenant, en remarquant que la fonction u_n est paire, on conclut que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge vers une fonction continue sur \mathbb{R} . 1

Problème

Soit $E = \{f \in C_b([0, +\infty[, \mathbb{R}) : \forall x > 0; \int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} dt \text{ converge}\}$.

Partie I

1) Soient $\varphi(t) = \frac{t}{1+t^2}, t \geq 0$ et $\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq e, \\ \frac{1}{\text{Log}t} & \text{si } t > e. \end{cases}$

a) On a $\forall t \geq 0, 0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{2}$ et φ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus $0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{x^2+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)(x^2+t^2)} dt$
 $\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{2} < +\infty.$ 1,5

Donc $\varphi \in E$.

On a pour $x > 0$ et $x \neq 1$:

$$\frac{u}{(1+u)(x^2+u)} = \frac{1}{(1-x^2)(1+u)} + \frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+u)}. \quad 1,5$$

Ce qui donne: $\int_0^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{(x^2+t^2)(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{2(x+1)}$; si $x \neq 1$. 1

D'autre part on a : $\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{(1+t^2)} - \frac{1}{(1+t^2)^2}$. 0,5

D'où $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$.

En posant $t = tg\theta$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$. 1

Ce qui donne $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{4}$.

En somme, on a: $\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{x^2+t^2} dt = \frac{\pi}{2(x+1)}$.

b) Comme $\forall x > 0, \frac{t\psi(t)}{x^2+t^2} \sim \frac{1}{t \text{Log} t}$ (quand $t \rightarrow +\infty$) et

$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t \text{Log} t} dt = +\infty$, alors $\psi \notin E$.

2) Les fonctions e^{-t} , $\sin t$ et $\cos t$ sont continues et bornées sur $[0, +\infty[$.

De plus on a: $\forall x > 0$

• $\frac{te^{-t}}{x^2+t^2} \sim \frac{e^{-t}}{t}$ ($t \rightarrow +\infty$), donc $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x^2+t^2} dt$ converge. 1

Ce qui montre que $t \mapsto e^{-t}$ est dans E .

• $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2+t^2} dt = \left[\frac{-t \cos t}{x^2+t^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} \cos t dt$. 1,5

$\Rightarrow \left| \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2+t^2} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^2} dt < +\infty$.

$$\bullet \int_0^{+\infty} \frac{t \cos t}{x^2 + t^2} dt = \left[\frac{t \sin t}{x^2 + t^2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \sin t dt. \quad 1,5$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^{+\infty} \frac{t \cos t}{x^2 + t^2} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + t^2} dt < +\infty.$$

Ainsi les fonctions $\sin t$ et $\cos t$ sont dans E .

3) Soit f une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = l \in \mathbb{R}.$$

a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = l \Rightarrow \exists a > 0$ tq $\forall t \geq a, |f(t)| \leq |l| + 1.$ 1

(1,5)

Comme f est continue sur $[0, +\infty[\Rightarrow \max_{0 \leq t \leq a} |f(t)|$ existe et est fini. 0,5

Donc $\forall t \geq 0, |f(t)| \leq \max_{0 \leq t \leq a} |f(t)| + |l| + 1.$

b) • Supposons que $l > 0$, alors $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall t \geq \alpha; f(t) \geq \frac{l}{2}.$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} dt \geq \int_0^\alpha \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} dt + \frac{l}{2} \int_\alpha^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} dt = +\infty.$ 1,5

(2,5)

Donc $f \notin E.$

• Si $l < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-f(t)) = -l > 0 \Rightarrow -f \notin E \Rightarrow f \notin E.$ 1

c) Pour le cas $l = 0$, on a:

(1,5)

• $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$ et $\varphi \in E.$ 0,75

• $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0$ et $\psi \notin E.$ 0,75

* Dans la suite pour $f \in E$ et $x > 0$, on pose $Tf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} dt.$

4) Soit $f \in E$, positive sur $[0, +\infty[.$

(1)

a) Si $0 < x \leq y \Rightarrow \forall t \geq 0; x^2 + t^2 \leq y^2 + t^2$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{tf(t)}{y^2 + t^2} \leq \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} \Rightarrow Tf(y) \leq Tf(x).$$

Donc Tf est décroissante sur $]0, +\infty[$.

b) Puisque $x \mapsto Tf(x)$ est décroissante sur $]0, +\infty[$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} Tf(x)$ existe dans $[0, +\infty[$.

c,5

②

D'après le théorème de convergence monotone, on a:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} Tf(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Tf\left(\frac{1}{n}\right) = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{tf(t)}{\frac{1}{n^2} + t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \leq +\infty. \quad 1,5$$

c) De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} Tf(x)$ existe et est positive.

0,5

D'après le théorème de convergence dominée, on a:

②,5

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} Tf(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Tf(n) = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{tf(t)}{n^2 + t^2} dt = 0. \quad 1$$

$$(\text{car } 0 \leq \frac{tf(t)}{n^2 + t^2} \leq \frac{tf(t)}{1 + t^2} \quad \forall n \geq 1, \forall t \geq 0 \text{ et } Tf(1) < \infty). \quad 1$$

5) Soit $f \in E$. On suppose que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge et qu'il existe deux constantes $c > 0$ et $\alpha > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$; $|f(t)| \leq c t^\alpha$.

a) On a $\forall x > 0$;

②,5

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt &= \int_0^{+\infty} f(t) \left[\frac{t}{x^2 + t^2} - \frac{1}{t} \right] dt \\ &= -x^2 \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(x^2 + t^2)t} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{f(rx)}{r(1+r^2)} dr. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 1,5 \end{array}$$

(On pose $t = rx \Rightarrow dt = xdr$)

$$b) \left| \int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \right| \leq c \int_0^{+\infty} \frac{r^\alpha x^\alpha}{r(1+r^2)} dr \quad 1,5$$

②,5

$$= c x^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{r^{\alpha-1}}{(1+r^2)} dr \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0. \quad 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} Tf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt.$$

6) a) Soient $x > 0$ et $t \geq 0$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right) \right| = \left| \frac{-2xt}{(x^2 + t^2)^2} \right| \leq \frac{2xt}{x^2 + t^2} \frac{1}{x^2 + t^2} \leq \frac{1}{x^2 + t^2}, \quad 1,5$$

(car $0 \leq \frac{2xt}{x^2 + t^2} \leq 1$).

D'autre part,

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right) \right| = \frac{2t|3x^2 - t^2|}{(x^2 + t^2)^3} \leq \frac{6t(x^2 + t^2)}{(x^2 + t^2)^3} \quad 2$$

Donc $\forall t \geq 0, \forall x > 0$, $\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right) \right| \leq \frac{6t}{(x^2 + t^2)^2}$.

b) Soit $0 < a \leq x \leq b < +\infty$. Alors pour $t \geq 0$ et $f \in E$, on a:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right) \right| \leq \frac{1}{a^2 + t^2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right) \right| \leq \frac{6t}{(a^2 + t^2)^2} \quad 2$$

et $t \mapsto \frac{|f(t)|}{a^2 + t^2}$; $t \mapsto \frac{t|f(t)|}{(a^2 + t^2)^2}$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

Donc $\forall f \in E$, la fonction Tf est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et on a pour tout $x > 0$;

$$(Tf)'(x) = -2x \int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{(x^2 + t^2)^2} dt \quad \text{et} \quad (Tf)''(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t(3x^2 - t^2)}{(x^2 + t^2)^3} f(t) dt. \quad 2$$

c) Soit $M = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$. On a pour $x > 0$:

$$|(Tf)'(x)| \leq 2xM \int_0^{+\infty} \frac{t}{(x^2 + t^2)^2} dt = xM \left[\frac{-1}{x^2 + t^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{M}{x}. \quad 1,5$$

$$|(Tf)''(x)| \leq 6M \int_0^{+\infty} \frac{t}{(x^2 + t^2)^2} dt = 3M \left[\frac{-1}{x^2 + t^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{3M}{x^2}. \quad 1,5$$

7) a) Il est facile de vérifier que $\forall (x, t) \neq (0, 0)$;

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right) = \frac{2t(t^2 - 3x^2)}{(x^2 + t^2)^3} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} \right).$$

b) Soit $f \in E$ telle que f soit de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f'(t)}{t} = 0$.

Soit $x > 0$, on a:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{t}{x^2+t^2} \right) f(t) dt &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{x^2+t^2} \right) f(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{x^2+t^2} \right) f'(t) dt \\
 &= \left[\frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} f(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{x^2+t^2} \right) f'(t) dt \\
 &= -\frac{f(0)}{x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{x^2+t^2} \right) f'(t) dt; \quad \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} f(t) = 0, \text{ car } f \text{ est bornée} \right) \\
 &= -\frac{f(0)}{x^2} - \left[\frac{t}{x^2+t^2} f'(t) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} f''(t) dt \\
 &= -\frac{f(0)}{x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} f''(t) dt; \quad \left(\text{car } \left| \frac{t}{x^2+t^2} f'(t) \right| \leq \frac{|f'(t)|}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \right).
 \end{aligned}$$

Donc $\forall x > 0$;

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{t}{x^2+t^2} \right) f(t) dt = -\frac{f(0)}{x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} f''(t) dt.$$

c) Comme $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{t}{x^2+t^2} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{t}{x^2+t^2} \right)$, alors

$$\forall x > 0; (Tf)''(x) = \frac{f(0)}{x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2+t^2} f''(t) dt.$$

Partie II

1) On rappelle que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. Soit $f(t) = \sin t$. On pose pour $x > 0$,

$$v(x) = T(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2+t^2} dt.$$

a) On a pour $x > 0$:

$$v(x) = \left[\frac{-t \cos t}{x^2+t^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} \cos t dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2-t^2}{(x^2+t^2)^2} \cos t dt.$$

b) On a $\forall x > 0$,

$$|v(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+t^2)} dt = \frac{\pi}{2x}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$.

2

c) Puisque $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge et $|\sin t| \leq t, \forall t \geq 0$. Il s'ensuit d'après (I-5-b), que 1

$\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$. 1

2,5

d) La fonction $f(t) = \sin t$, est dans E , de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f'(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cos t}{t} = 0$. Alors d'après (I-7-c), on a pour tout $x > 0$: 1

$(Tf)''(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} f''(t) dt$. 1

C'est à dire

$v''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} \sin t dt$. 0,5

Donc $\forall x > 0, v''(x) - v(x) = 0$.

2

e) $\forall x > 0; v(x) = ae^x + be^{-x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. 1

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0 \implies a = 0$ 0,5

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = \frac{\pi}{2} \implies b = \frac{\pi}{2}$. 0,5

D'où $\forall x > 0, v(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$.

1,5

2) On pose $w(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} e^{-t} dt$, pour $x > 0$.

a) Soit $f(t) = e^{-t}, t \geq 0$. Alors $f \in E$ et f est positive. 1

Donc d'après (I-4-c); $\lim_{x \rightarrow +\infty} Tf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = 0$. 0,5

2,5

b) La fonction $f(t) = e^{-t}, t \geq 0$, est dans E , de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f'(t)}{t} = 0$. Donc d'après (I-7-c); 1

$(Tf)''(x) = \frac{1}{x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} f''(t) dt, \forall x > 0$. 1

C'est à dire: $w''(x) + w(x) = \frac{1}{x^2}, \forall x > 0$. 0,5

c) Comme pour tout $t > 0$, on a $w''(t) + w(t) = \frac{1}{t^2}$, alors pour tout $x > 0$, on obtient

$$\int_x^{+\infty} w(t) dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt - \int_x^{+\infty} w''(t) dt \quad 1$$

$$= \frac{1}{x} + w'(x) \quad (\text{car } \lim_{\xi \rightarrow +\infty} w'(\xi) = 0 \text{ d'après I-6-c})$$

C'est à dire $w'(x) = -\frac{1}{x} + \int_x^{+\infty} w(t) dt.$ 1,5

d) La fonction w vérifie (*) $\begin{cases} w''(x) + w(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \forall x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = 0. \end{cases}$

Soit u une autre fonction sur $]0, +\infty[$ vérifiant: $\begin{cases} u''(x) + u(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \forall x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \end{cases}$

alors $(u - w) := \rho$ vérifie:

$$\begin{cases} \rho''(x) + \rho(x) = 0, \quad \forall x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = 0, \end{cases} \quad 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho(x) = a \cos x + b \sin x, \quad \forall x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = 0, \end{cases} \quad 1$$

$$\Rightarrow \rho(x) = 0; \quad \forall x > 0.$$

C'est à dire $u = w$.

Donc w est l'unique fonction sur $]0, +\infty[$ vérifiant (*).

e) On a pour tout $x > 0$;

$$0 < w(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} e^{-t} dt \leq \frac{1}{x^2} \left(\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt \right) = \frac{1}{x^2}. \quad 1,5$$

Ce qui donne: $\forall x > 0, w''(x) = \frac{1}{x^2} - w(x) \geq 0.$ 0,5

C'est à dire que w est convexe sur $]0, +\infty[$.

3) a) On a pour $x > 0$;

$$\begin{aligned}
 0 \leq 1 - x^2 w(x) &= \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt - x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} e^{-t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} t e^{-t} \left(1 - \frac{x^2}{x^2 + t^2}\right) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{x^2 + t^2} e^{-t} dt \\
 &\leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt = \frac{\Gamma(4)}{x^2} = \frac{6}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.
 \end{aligned}$$

(2,5)

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 w(x) = 1$.

b) Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
 w(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{x^2 + t^2} e^{-t} dt \\
 &= \left[\frac{e^{-t}}{2} \text{Log}(x^2 + t^2) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} \text{Log}(x^2 + t^2) dt \\
 &= -\text{Log} x + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} \text{Log}(x^2 + t^2) dt.
 \end{aligned}$$

(2)

c) i) On a pour $0 < x < 1$;

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{w(x)}{\text{Log} x} + 1 \right| &= \left| \frac{1}{2 \text{Log} x} \int_0^{+\infty} e^{-t} \text{Log}(x^2 + t^2) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2 |\text{Log} x|} \int_0^{+\infty} e^{-t} \text{Log}(1 + t^2) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.
 \end{aligned}$$

(1,5)

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{w(x)}{\text{Log} x} = -1$.

ii) Soit $0 < a \leq x \leq b < +\infty$. Alors pour $t \geq 0$, on a:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (e^{-t} \text{Log}(x^2 + t^2)) \right| = \frac{2xe^{-t}}{x^2 + t^2} \leq \frac{2be^{-t}}{a^2 + t^2}$$

(1,5)

et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{a^2 + t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Donc $x \mapsto F(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} \text{Log}(x^2 + t^2) dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

on a pour tout $x > 0$;

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2 + t^2} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-rx}}{1+r^2} dr. \end{aligned} \quad 1,5$$

(on pose $t = rx \Rightarrow dt = xdr$).

D'où en utilisant (II-3-b) on déduit que pour tout $x > 0$

$$w'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}F'(x) = -\frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-rx}}{1+r^2} dr. \quad 1$$

d) La fonction w est continue. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{w(x)}{\text{Log}(x)} = -1$
 $\Rightarrow w$ est intégrable sur $]0, 1[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 w(x) = 1 \Rightarrow w$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

1

Donc w est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On a d'après (II-2-c) et (II-3-c-(ii))

$$\int_x^{+\infty} w(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-rx}}{1+r^2} dr \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} \text{ (d'après le théorème de convergence monotone).}$$

1,5

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} w(t) dt = \frac{\pi}{2}.$$

4) On considère la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x+t} dt.$$

a) Posons $x+t = u$, alors on a

$$h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u-x)}{u} du = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

b) Les fonctions $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ et $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ sont de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

Donc h est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et on a:

0,5

$$h'(x) = -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \frac{1}{x}$$

0,5

②

et

$$h''(x) = -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du + \frac{1}{x^2}.$$

0,5

C'est à dire: $\forall x > 0; h''(x) + h(x) = \frac{1}{x^2}$.

0,5

c) $\forall x > 0;$

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x+t} dt$$

①

$$= \left[\frac{\sin t}{x+t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^2} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^2} dt$$

d) On a $\forall x > 0; |h(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2} dt = \frac{1}{x}$.

1

②

Donc h vérifie: $\begin{cases} h''(x) + h(x) = \frac{1}{x^2}, \forall x > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0. \end{cases}$

0,5

D'après (II-2-d), On a : $h(x) = w(x), \forall x > 0.$

0,5

