REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2003

Concours Mathématiques et physique
Epreuve de Physique

Date : Lundi 09 juin 2003	**Heure : 8 H**	**Durée : 4 H**	**Nb pages : 8**

Barème : Exercice:3.5/20 ; Pb1:8/20 (A/1.5;B/2.75;C/3.75) **; Pb2:8.5/20** (A/1.25;B/5;C/2.25)

L'usage d'une calculatrice (non programmable) est autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve comporte un exercice et deux problèmes indépendants. Le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.

Exercice : Bilan d'énergie pour un écoulement permanent

On considère un fluide, assimilé à un gaz parfait, en écoulement permanent dans une canalisation indéformable et calorifugée (parois adiabatiques).

Le fluide arrive à une machine (M) avec une température T_1, une vitesse c_1, une énergie interne massique u_1, une enthalpie massique h_1 et sous une pression P_1.

Le fluide reçoit algébriquement, de la part de la machine, une puissance thermique P_{th} et une puissance mécanique (ou utile) P_u. Cette dernière n'inclut pas la puissance des forces de pression.

Le fluide est refoulé, après la traversée de la machine, avec une température T_2, une vitesse c_2, une énergie interne massique u_2, une enthalpie massique h_2 et sous une pression P_2 (cf.figure 1).

On suppose que T_1, P_1, c_1, u_1, h_1, T_2, P_2, c_2, u_2 et h_2 sont des constantes.

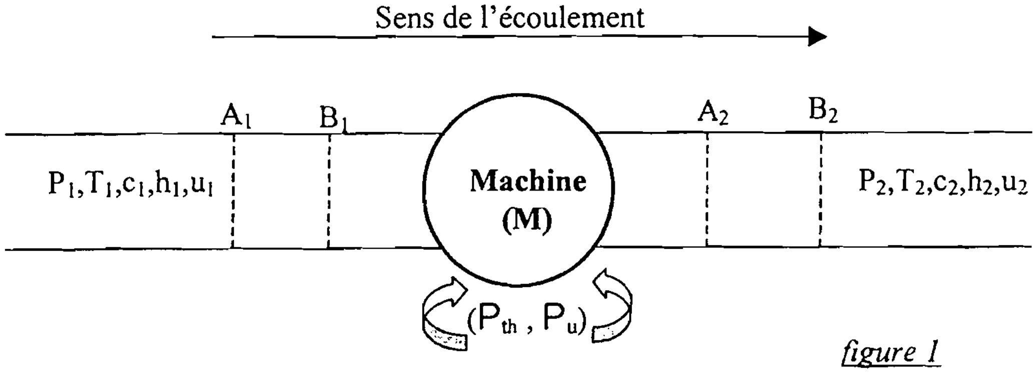

figure 1

1- Montrer, qu'en régime permanent, le débit massique D_m se conserve le long de la canalisation. On rappelle que $D_m = \frac{dm}{dt}$, où dm désigne la masse traversant, pendant l'intervalle de temps dt, une section de la canalisation.

2- On considère le système fermé, constitué par le fluide contenu :

- entre les sections A_1 et A_2 à l'instant t,
- entre les sections B_1 et B_2 à l'instant t+dt.

a- On désigne par E(t) et E(t+dt) les énergies totales du système respectivement aux instants t et t+dt. Montrer, qu'en régime permanent, on a : $E(t+dt)-E(t) = dE_2 - dE_1$, où dE_1 et dE_2 désignent les énergies totales contenues respectivement entre les sections A_1 et B_1 et entre les sections A_2 et B_2.

b- Exprimer dE_i en fonction de D_m, dt , u_i et c_i ; pour i =1 et i = 2 . On supposera que l'énergie potentielle de pesanteur est nulle en tout point de la canalisation.

c- Montrer que la puissance des forces de pression s'écrit : $P_{pression} = (P_1v_1 - P_2v_2)D_m$, où v_1 et v_2 désignent respectivement les volumes massiques, supposés constants, du fluide en amont (avant) et en aval (après) de la machine.

d- En déduire, par application du premier principe de la thermodynamique, que :

$$D_m \left[(h_2-h_1)+\frac{1}{2}\left(c_2^2-c_1^2\right)\right] = P_{th} + P_u.$$

3- En négligeant toute variation d'énergie cinétique et en supposant une évolution isentropique, calculer la puissance utile fournie à la machine (M).

On donne : $T_1 = 1000$ K ; $P_1 = 10$ bar ; $P_2 = 2$ bar ; $M = 29$ g.mol^{-1} ; $D_m = 0{,}1$ kg.s^{-1} ; $\gamma = 1{,}4$; $R = 8.3$ J.K^{-1}.mol^{-1}.

γ est le rapport entre les capacités thermiques molaires à pression constante c_{pm} et à volume constant c_{vm}.

M est la masse molaire du gaz et R est la constante des gaz parfaits.

Fin de l'exercice

Problème 1 : Conductions simultanées de la chaleur et de l'électricité

On considère un milieu homogène et isotrope de permittivité électrique ε_0 et de perméabilité magnétique μ_0.

On désigne par ρ et $\vec{J}$ respectivement les densités volumiques de charge et de courant électrique.

On note $(\vec{E}, \vec{B})$ le champ électromagnétique qui règne dans ce milieu, ω_{em} la densité volumique d'énergie électromagnétique et $\vec{R}$ le vecteur de Poynting.

A- Préliminaires

Localement, le bilan d'énergie électromagnétique s'écrit :

$$-\frac{\partial \omega_{em}}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{R} + \vec{J}.\vec{E}$$

1- En utilisant les équations de Maxwell, vérifiées par le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans ce milieu, donner, par identification, des expressions simples de ω_{em} et $\vec{R}$.
On donne, pour les deux champs de vecteur $\vec{a}$ et $\vec{b}$: $\operatorname{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}.\vec{rot}\,\vec{a} - \vec{a}.\vec{rot}\,\vec{b}$.

2- Ecrire, en régime permanent, le bilan d'énergie électromagnétique pour un volume fixe (V) délimité par une surface fermée (S). Donner la signification physique de chaque terme.

B- Bilan d'énergie électromagnétique dans un conducteur cylindrique

Le milieu conducteur considéré est maintenant un cylindre de longueur L, de rayon a et de conductivité électrique γ constante.
Il est parcouru, selon son axe (oz), par un courant électrique permanent de vecteur densité volumique uniforme $\vec{J} = J_0\,\vec{e}_z$ (cf.figure 2).

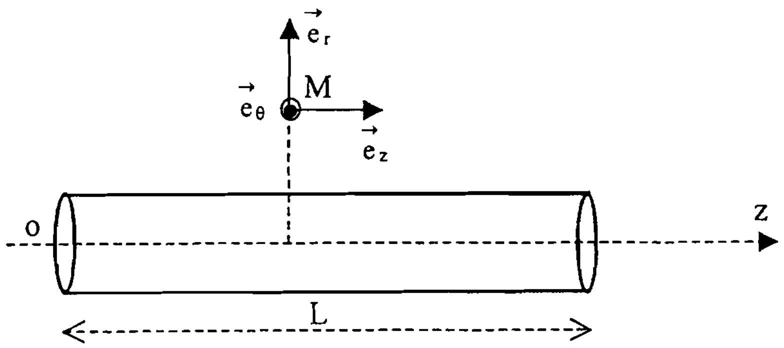

figure 2

3- Donner, en fonction de γ et J_0, l'expression du champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur de ce conducteur ohmique.

4- En supposant que le cylindre est infini (L>>a), justifier que le champ magnétique, en un point M de coordonnées cylindriques (r,θ,z), s'écrit : $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_\theta$.

5- Déterminer, par application du théorème d'Ampère, l'expression du champ magnétique en tout point M de l'espace, de coordonnées cylindriques (r,θ,z).

6- Déterminer, en un point M à l'intérieur du cylindre ($r \leq a$), l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$.

En déduire l'expression de la puissance qui rentre dans le volume du conducteur (cylindre de rayon a et de longueur L).

7- En déduire l'expression de la résistance électrique R_e de ce conducteur cylindrique.

C- Transfert thermique et courant électrique

On considère le cylindre décrit précédemment, parcouru toujours par le courant électrique de vecteur densité volumique uniforme $\vec{J} = J_0\,\vec{e}_z$.

On désigne par μ sa masse volumique, par c sa capacité thermique massique et par λ sa conductivité thermique.

On admet que toutes les grandeurs caractérisant le milieu (μ,c,λ,γ) sont constantes, uniformes et indépendantes de la température T.

Le cylindre est mis en contact thermique avec deux thermostats qui maintiennent ses extrémités, $z = 0$ et $z = L$, respectivement aux températures constantes T_1 et T_2 (cf.figure 3).

La surface latérale du cylindre est parfaitement calorifugée (parois adiabatiques) de telle sorte que l'on peut négliger les transferts thermiques à travers cette surface.

Dans toute cette partie, seul le transfert thermique par conduction, régi par la loi de Fourier, est à considérer.

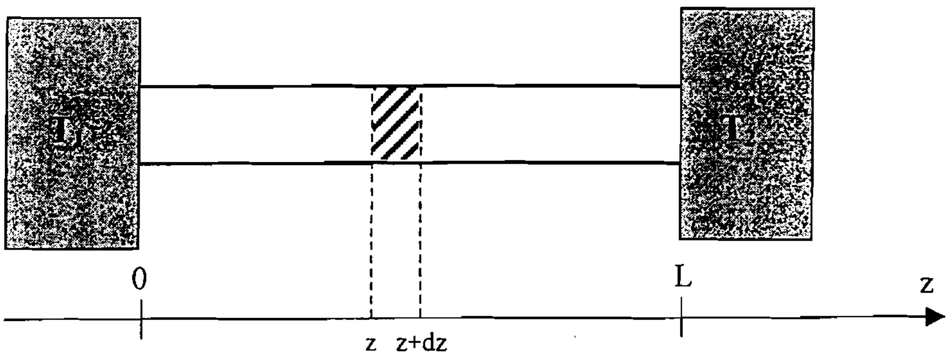

figure 3

En se limitant à un phénomène unidimensionnel, pour lequel la température T ne dépend que de la variable z et éventuellement du temps t, l'équation différentielle vérifiée par la température T(z,t) s'écrit :

$$\mu\, c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{J_0^2}{\gamma} \qquad (1)$$

8- En effectuant un bilan d'énergie sur une tranche du cylindre de longueur élémentaire dz, entre les instants t et t+dt, retrouver l'équation de diffusion thermique (1). On expliquera la signification physique du terme $\frac{J_0^2}{\gamma}$.

Dans la suite du problème, on travaillera <u>en régime permanent</u>.

9- Déterminer, la température $T(z)$ de l'équation de diffusion.

10- Dans le cas $J_0 = 0$, définir et exprimer la résistance thermique R_{th} de la barre cylindrique.

11- Pour $J_0 \neq 0$, exprimer la puissance $P(z)$ traversant, dans le sens des z croissants, une section droite d'abscisse z du cylindre.

12- En déduire les expressions des puissances thermiques P_1 et P_2 **reçues** par les deux thermostats. Ecrire alors une relation entre P_1, P_2 et la puissance P_J dissipée, par effet Joule, dans le cylindre. Commenter.

13- On impose, à présent, aux deux extrémités, $z = 0$ et $z = L$, une même température T_0 ($T_1 = T_2 = T_0$).

Vérifier que la température s'écrit alors : $T(z) = T_0 + \alpha\,(- z^2 + L\,z)$.

Exprimer α en fonction de J_0, γ et λ.

14- On désigne par T_F la température de fusion du matériau conducteur.

Afin d'éviter la fusion, montrer que l'intensité du courant électrique parcourant le cylindre doit être inférieure à une valeur I_0 que l'on exprimera en fonction de T_0, T_F, λ, γ, a et L.

Calculer I_0 et proposer une application.

On donne : $T_0 = 300$ K ; $T_F = 600$ K ; $\lambda = 10^2\ W.m^{-1}.K^{-1}$; $\gamma = 4{,}3\ 10^7\ S.m^{-1}$; $a = 0{,}1$ mm ; $L = 1$ cm.

Fin du problème 1

Problème 2 : Diffraction et filtrage des fréquences spatiales

On considère une onde plane, monochromatique et de longueur d'onde λ éclairant, sous une incidence normale, un objet plan, placé en O perpendiculairement à l'axe optique (Oz).

Cet objet, caractérisé par sa fonction de transparence t(x), est limité, suivant l'axe Ox, par une fente de largeur a.

A une distance d de l'objet, on place une lentille convergente (L), de centre O_L et de distance focale image f' (cf.figure 4).

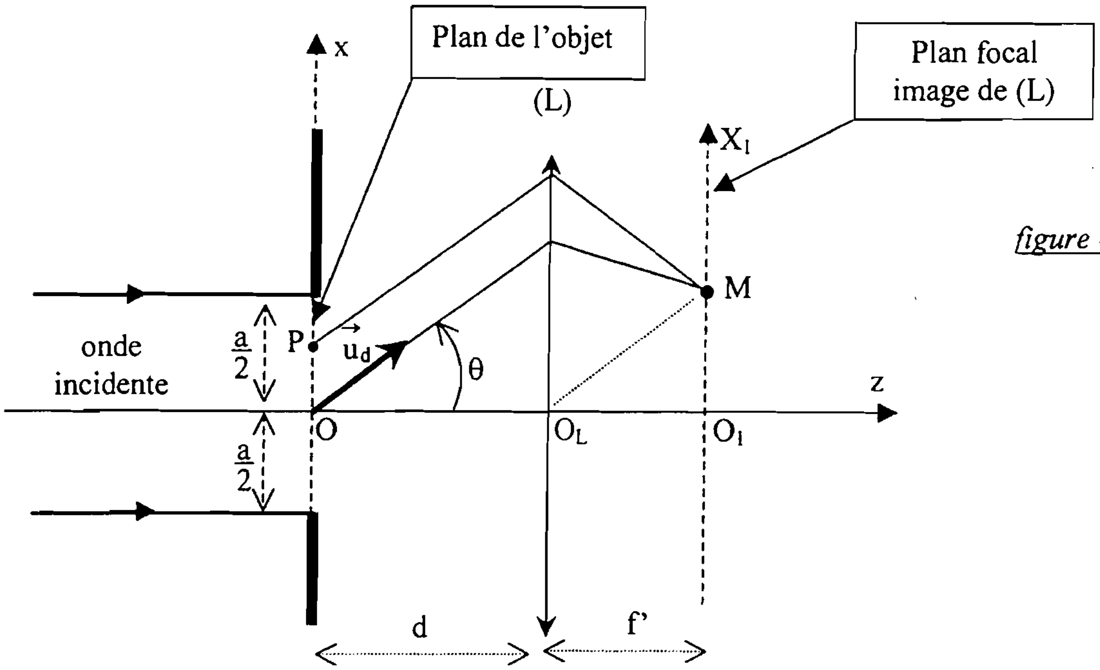

figure 4

Dans tout le problème, on supposera satisfaite l'approximation de Gauss de l'optique géométrique.

A- Préliminaire

1- Dans l'approximation de Fraunhofer (ou diffraction à l'infini), l'amplitude complexe de l'onde diffractée dans la direction du vecteur $\vec{u}_d$, faisant l'angle θ avec l'axe optique (Oz) s'écrit :

$\underline{A} = A_0 \int_{-a/2}^{+a/2} t(x) \exp(-i\,\vec{k}\cdot\vec{OP})\,dx$, où $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\,\vec{u}_d$ est le vecteur d'onde, P est un point de l'objet d'abşcisse x et A_0 est une constante supposée réelle.

Vérifier que l'amplitude $\underline{A}$ peut se mettre sous la forme : $\underline{A}(u) = A_0 \int_{-a/2}^{+a/2} t(x) \exp(-i2\pi x u)\,dx$, où u est à exprimer en fonction de λ et θ (θ étant faible).

2- Justifier l'appellation ***fréquence spatiale*** donnée à u.

3- Quelle est le rôle de la lentille convergente (L) ?

B – transparence sinusoïdale

L'objet est caractérisé par la fonction de transparence sinusoïdale : $t(x) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{p}\right)$,

p est une constante positive, appelée pas ou période.

4- Déterminer, pour cet objet, l'expression de l'amplitude $A(u)$ de l'onde diffractée à l'infini. En déduire que $A(u)$ est la somme de trois amplitudes A_1, A_2 et A_3 centrées respectivement aux fréquences spatiales : $-u_0$, 0 et $+u_0$. Exprimer u_0 en fonction du pas p.

5- En supposant que <u>la largeur a de la fente est très grande par rapport au pas p</u>, représenter, en fonction de la fréquence spatiale u, l'allure de la courbe donnant les variations de l'amplitude $A(u)$. Cette courbe est appelée ***spectre*** de l'objet.

6- Déterminer, en fonction de u, les intensités I_1, I_2 et I_3 associées respectivement aux amplitudes A_1, A_2 et A_3. Exprimer, en fonction de X_1, f', a, p et λ, l'intensité I de l'onde diffractée en tout point M du plan focal image de la lentille convergente (L). X_1 désigne l'abscisse de M suivant l'axe (O_1X_1). Représenter l'allure de la courbe $I(X_1)$.
On notera I_0 l'intensité de l'onde diffractée en $X_1 = 0$.

7- La lentille (L) est placée à une distance d = 2 f' du plan de l'objet (cf.figure 4).
A quelle distance d' de la lentille doit-on placer l'écran d'observation (E) sur lequel se forme une image géométrique nette de l'objet ? Calculer le grandissement transversal γ.

8- On place, maintenant, dans le plan focal de la lentille (L), une fente de largeur b, centrée sur l'axe optique (Oz) (cf.figure 5). Si la largeur b est suffisamment grande, pour que la répartition de la lumière dans le plan focal ne soit pas affectée, l'image obtenue sur l'écran d'observation (E) ressemble à l'objet.

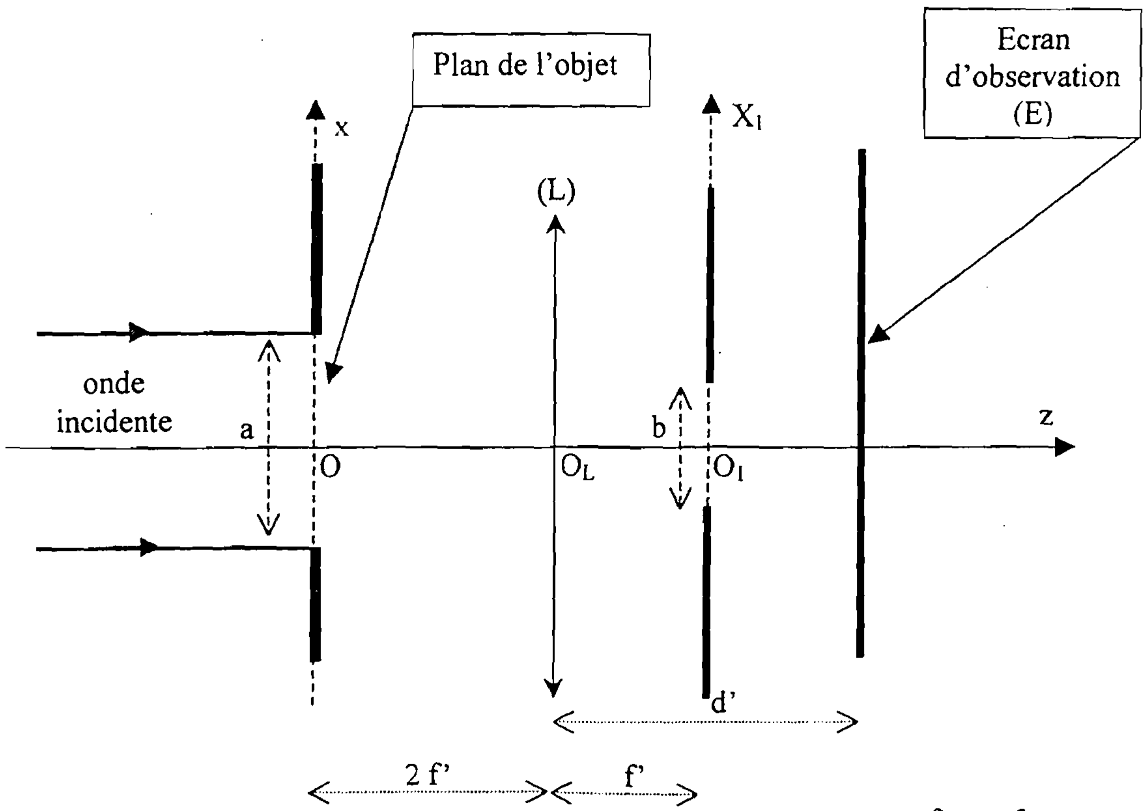

figure 5

Ainsi, si on ne perturbe pas le spectre, les fréquences spatiales qu'il contient permettent de restituer sur l'écran (E) une image géométrique identique à l'objet.

a- En utilisant la question 6, exprimer en fonction de λ, a et f ', la largeur ΔX_1 d'un maximum principal (distance séparant les deux premiers minima nuls qui l'entourent).

b- En déduire, en fonction de λ, p, a et f', la largeur maximale b_0 de la fente pour que seul le pic central, correspondant à une fréquence spatiale nulle, ne soit pas occulté (masqué).
On négligera les maxima secondaires entourant un maximum principal de largeur ΔX_1.

c- Décrire ce qu'on observe, comme image, sur l'écran d'observation (E).

d- En déduire à quoi correspondent les basses fréquences dans le spectre d'un objet.

C- Expérience d'Abbe

On enlève, à présent, la fente qu'on a placé dans le plan focal de (L) et on remplace l'objet par un réseau plan, constitué de N fentes identiques parfaitement transparentes percées dans un écran opaque. Ce réseau, de pas p_0, est éclairé sur une largeur utile a.

L'intensité I de l'onde diffractée à l'infini par ce réseau s'écrit :

$$I(\varphi) = I_0 \left[\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{N\sin\frac{\varphi}{2}} \right]^2,$$

où I_0 est une constante et φ désigne le déphasage entre deux ondes diffractées par deux fentes consécutives dans une même direction qui fait l'angle faible θ avec l'axe optique (Oz).

9- Exprimer le déphasage φ en fonction de p_0, λ et θ.

10- En déduire que la fréquence spatiale u_k, correspondant au maximum principal d'ordre k, s'écrit : $u_k = \dfrac{k}{p_0}$.

11- On occulte de la figure de diffraction, obtenue dans le plan focal image de (L), les maxima principaux d'ordre impair ($\pm1, \pm3, \ldots$).
Justifier que l'image observée sur l'écran (E) est celle obtenue par un autre réseau dont on déterminera son pas p_1.

12- L'étude de la fonction $I(\varphi)$ montre que les premiers minima nuls à partir d'un maximum principal correspondent à $\varphi = \pm \dfrac{2\pi}{N}$.
Montrer que, lorsqu'on ne laisse passer que le maximum principal d'ordre zéro, l'image observée sur l'écran (E) est celle obtenue par une fente de largeur a.

Fin du problème 2

Fin de l'épreuve