

# CORRECTION MPI (session 2004)

## Première partie

1. a)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$  converge  $\iff x > 1$ ,  $x \mapsto \frac{1}{n^x}$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ . de même pour  $\zeta$ .

b)  $\zeta$  est monotone donc admet une limite en  $1^+$ .

$$\zeta(x) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x}, \quad \forall x > 1 \text{ et } N \in \mathbb{N}^*.$$

En faisant tendre  $x \mapsto 1^+$  puis  $N \mapsto +\infty$  on obtient le résultat demandé.

c)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ , pour  $a > 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ On applique le théorème du double limite.}$$

d) L'application  $x \mapsto \frac{1}{n^x}$  est  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et  $(\frac{1}{n^x})^{(k)} = (-1)^k \frac{(\text{Log } n)^k}{n^x}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Pour tout  $a > 1$  et  $x \geq a$ ; on a :

$$* \quad \left| (-1)^k (\text{Log } n)^k \frac{1}{n^x} \right| \leq \frac{(\text{Log } n)^k}{n^a} \text{ et}$$

$$* \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1+a}{2}} \frac{(\text{Log } n)^k}{n^a} = 0.$$

Donc

$$\zeta \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } ]1, +\infty[ \text{ et } \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\text{Log } n)^k}{n^x}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

e) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall t \in [n, n+1]$  on a :

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}, \text{ donc pour tout entier non nul } N \text{ on aura,}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_1^{N+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x}.$$

$$\text{En faisant tendre } N \text{ vers } +\infty \text{ on obtient } \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x)$$

2.  $\zeta(x)$  est équivalente à  $\frac{1}{x-1}$  au voisinage de  $1^+$ .

## Deuxième partie

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x > -1$  on a :  $1 + \frac{x}{n} > 0$ .

$$\text{Log}\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ donc } g_n(x) \sim \frac{x^2}{2n^2}. \text{ Donc } F \text{ est bien définie sur } ]-1, +\infty[.$$

2. On a :  $g'_n(x) = \frac{x}{n(x+n)}$ .

Pour tout segment  $[a, b]$  de  $] -1, +\infty[$  on a :

$$\text{Pour } n \text{ assez grand, } \left| g'_n(x) \right| \leq \frac{|a| + |b|}{n(n+a)} = \alpha_n \text{ pour tout } x \in [a, b] \text{ et}$$

$\sum_{n \geq 1} \alpha_n$  est une série convergente.

3. On a :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $g_n$  est  $C^1$  sur  $] - 1, +\infty[$ .
- la série  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge simplement sur  $] - 1, +\infty[$ .
- La série  $\sum_{n \geq 1} g'_n$  converge uniformément sur tout segment de  $] - 1, +\infty[$ .

Donc  $F$  est de classe  $C^1$  et  $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+x)}$ .

4. - Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $g_n$  est de classe  $C^\infty$ .

- La série  $\sum_{n \geq 1} g'_n$  converge uniformément sur tout segment de  $] - 1, +\infty[$ .

- Pour tout entier  $p \geq 2$ ,  $g_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p (p-1)!}{(n+x)^p}$ .

- Pour tout entier  $p \geq 2$  et  $b \geq a > -1$ ,  $\sup_{[a,b]} |g_n^{(p)}(x)| = \frac{(p-1)!}{(n+a)^p}$

-  $\sum_{n \geq 1} \frac{(p-1)!}{(n+a)^p}$  converge.

Donc  $F$  est donc  $C^\infty$  sur  $] - 1, +\infty[$  et  $\forall x > -1$  et  $k \geq 2$   $F^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)!}{(n+x)^k}$ .

5. Pour tout entier  $k \geq 2$ ,  $F^{(k)}(0) = (-1)^k (k-1)! \zeta(k)$ .

6. a)  $\gamma_{n+1} - \gamma_n = g_n(1) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

b)  $\sum_{n \geq 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$  converge et on a  $\forall N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^N (\gamma_{n+1} - \gamma_n) = \gamma_{N+1} - \gamma_1 = \sum_{n=1}^N g_n(1) + \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right).$$

Par passage à la limite on obtient  $\gamma = F(1)$ .

7. a)  $\text{Log}(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ ,  $R=1$ .

b)

- Pour  $x = \frac{1}{2}$  on obtient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 2^n} = \text{Log}\left(\frac{3}{2}\right)$ .

- Pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$

On applique le Théorème du double limite on obtient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \text{Log}(2)$ .

c)  $g_n(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k n^k} x^k$ .

8. a) i) Par majoration du reste d'une série alternée on a :

$$\left| \psi_N\left(\frac{x}{n}\right) \right| = \left| \sum_{k=N}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{n^k k} \right| \leq \frac{1}{N n^N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

ii) On a  $\sum_{n \geq 1} \psi_N\left(\frac{x}{n}\right)$  converge absolument et

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \psi_N\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \psi_N\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Nn^N} = \frac{\zeta(N)}{N}$$

b) i)  $\left| \psi_N\left(\frac{x}{n}\right) \right| = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(-x)^k}{n^k k} \leq \frac{1}{Nn^N} \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{Nn^N(1+x)}$

ii) On a  $\sum_{n \geq 1} \psi_N\left(\frac{x}{n}\right)$  converge absolument et

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \psi_N\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Nn^N} = \frac{1}{x+1} \frac{\zeta(N)}{N}$$

c) Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta(N) = 1$  alors d'après a)-ii) et b)-ii) on a :

$$\forall x \in ]-1, 1], \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_N\left(\frac{x}{n}\right) = 0$$

9. D'après 7-c), on a

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} x^k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{N-1} \frac{(-1)^k}{kn^k} x^k + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_N\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{k=2}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k} x^k \zeta(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_N\left(\frac{x}{n}\right).$$

En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$  et en utilisant 8-(c) on aura  $F(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} x^k$

10. On a  $\frac{\zeta(k)}{k} \sim_{\infty} \frac{1}{k}$ , donc  $R = 1$  et  $\frac{F^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k}$ .

### Troisième partie

1. Pour tout  $x > 1$ ,  $0 \leq f_k(x) \leq \frac{x}{x^{k+1}} = \frac{1}{x^k}$ , intégrable au voisinage de  $+\infty$  ( $k \geq 2$ ).

2.  $U_n(k) = \int_n^{n+1} f_k(x) dx = n \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{k+1}} = \frac{n}{k} \left( \frac{1}{n^k} - \frac{1}{(n+1)^k} \right)$

3. Soit  $N$  un entier  $\geq 2$ ,

$$\int_1^{N+1} f_k(x) dx = \sum_{n=1}^N U_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n^{k-1}} - \frac{n}{(n+1)^k} \right) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{(n+1)^{k-1}} + \frac{1}{(n+1)^k} \right) = \frac{1}{k} \left( 1 - \frac{1}{(N+1)^{k-1}} + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^k} \right)$$

Par passage à la limite on obtient  $\int_1^{+\infty} f_k(x) dx = \frac{\zeta(k)}{k}$

4. On a:  $|(-1)^k V_k| = V_k = \int_2^{+\infty} f_k(x) dx \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{(k-1)2^{k-1}}$

la série  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-1)2^{k-1}}$  est convergente.

$$5. a) V_k = \int_2^{+\infty} f_k(x) dx = \int_1^{+\infty} f_k(x) dx - \int_1^2 f_k(x) dx = \frac{\zeta(k)}{k} - \int_1^2 \frac{1}{x^{k+1}} dx = \frac{\zeta(k)}{k} + \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^k} - 1 \right)$$

$$b) V = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{\zeta(k)}{k} + \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2^k} - 1 \right) \right) = F(1) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = F(1) - \text{Log}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{Log}(2) - 1 = F(1) + \text{Log}\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{2}$$

6. a)  $\phi$  est continue par morceaux sur  $[2, +\infty[$  et

$$0 \leq \phi(x) \leq \frac{1}{x(1+x)} \sim_{\infty} \frac{1}{x^2}.$$

$$b) V = \sum_{k=2}^{\infty} \int_2^{\infty} \frac{(-1)^k E(x)}{x^{k+1}} dx = \int_2^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k E(x)}{x^{k+1}} dx = \int_2^{\infty} \frac{E(x)}{x} \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} dx = \int_2^{+\infty} \phi(x) dx$$

la permutation  $\sum$  et  $\int$  se justifie par :

- $x \mapsto \frac{(-1)^k E(x)}{x^{k+1}}$  est intégrable sur  $[2, +\infty[$ .
- la série  $\sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k E(x)}{x^{k+1}}$  converge simplement sur  $[2, +\infty[$ .
- $\int_2^{\infty} \left| \frac{(-1)^k E(x)}{x^{k+1}} \right| dx = V_k$  et  $\sum_{k \geq 2} V_k$  converge.

Pour justifier la permutation on peut aussi montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_2^{+\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^k E(x)}{x^{k+1}} dx = 0.$$

$$c) \int_n^{n+1} \phi(x) dx = n \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2(1+x)} dx.$$

$$\text{Or } \frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

$$\text{donc } \int_n^{n+1} \phi(x) dx = n \left[ \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} - \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \right]$$

d) Soit  $A_n = \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$ . On a,

$$\sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} \phi(x) dx = \sum_{n=2}^N n(A_{n+1} - A_n) = NA_{N+1} - \sum_{n=3}^{N+1} A_n - 2A_2$$

En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$  on obtient

$$V = \sum_{n=3}^{+\infty} A_n - 2A_2 = F(1) + \frac{1}{2} - \text{Log}\frac{4}{3}$$

---


$$1. \text{Log}(G_n(x)) = \text{Log}n! + x\text{Log}n - \sum_{k=1}^n \text{Log}(x+k) = x\text{Log}n - \sum_{k=1}^n \text{Log}\left(1 + \frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^n g_k(x) - x\gamma_n$$


---

2. a) Par passage à la limite dans question 1), on obtient  $\forall x \in ]-1, +\infty[$ ,  
 $\text{Log}(G(x)) = F(x) - x\gamma$  donc  $G(x) = e^{F(x) - \gamma x}$ .

---

b)  $G_n(x+1) = (x+1) \frac{n}{x+n+1} G_n(x)$ .

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  on obtient  $G(x+1) = (x+1)G(x)$ .

---

c) • D'après 2-a), on a  $H(x) = \frac{G(x)}{x} > 0, \forall x > 0$ .

•  $xH(x) = G(x) = \frac{G(x+1)}{x+1} = H(x+1)$ .

•  $H(1) = \frac{G(1)}{1} = 1$

•  $H$  est  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$  et  $(\text{Log}H)''(x) = F''(x) + \frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} + \frac{1}{x^2} \geq 0$ .

---

3. Par récurrence  $J(n) = (n-1)! \Rightarrow H(n) = (n-1)! \Rightarrow G(n) = n!$ .

---

4. a) i) On applique l'inégalité de convexité à  $\text{Log}J$  :

\*  $n-1 < n < n+x \Rightarrow \text{Log} \frac{J(n)}{J(n-1)} \leq \frac{1}{x} \text{Log} \frac{J(n+x)}{J(n)}$ ,

\*  $n < n+x < n+1 \Rightarrow \frac{1}{x} \text{Log} \frac{J(n+x)}{J(n)} \leq \text{Log} \frac{J(n+1)}{J(n)}$ .

---

ii) En utilisant 3 et 4-a), on obtient,

$$x\text{Log}(n-1) \leq \text{Log} \frac{J(n+x)}{J(n)} \leq x\text{Log}n \Rightarrow (n-1)!(n-1)^x \leq J(n+x) \leq n^x(n-1)!$$


---

iii) Par récurrence sur  $p$  on obtient  $J(p+x) = (x+p-1)(x+p-2) \cdots xJ(x), \quad p \in \mathbb{N}^*$ .

---

iv) On applique 4-a)-ii),

\* pour  $n = p, \quad J(n+x) \leq n^x(n-1)! \Rightarrow \frac{n}{n+x} J(x) \leq \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}$ .

\* pour  $n = p+1 \geq 2, \quad n!n^x \leq J(n+1+x) \Rightarrow \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \leq J(x)$ .

---

b) Par passage à la limite dans 4-a) - iv) on obtient  $\forall x \in ]0, 1[$ , on a  $J(x) = \frac{G(x)}{x}$ .  
L'égalité reste vraie pour  $x = 1$ .

---

c) On a  $G(x) = xG(x-1) = x(x-1)G(x-2) = x(x-1) \cdots (x-p+1)G(x-p)$ .

---

d)  $J$  et  $x \mapsto \frac{G(x)}{x}$  coïncident sur  $]0, 1]$  d'après 4-b).

pour  $x > 1$  et  $p = E(x)$  on a  $J(x-p) = \frac{G(x-p)}{x-p}$  car  $x-p \in ]0, 1[$ ,

on obtient  $\frac{G(x)}{x} = (x-1) \cdots (x-p+1)(x-p)J(x-p) = J(x)$ .

## Cinquième partie

1. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $C_n(f) = \frac{(-1)^n}{\pi(x-n)} \sin(x\pi)$

La série de Fourier de  $f$  est  $\frac{\sin(x\pi)}{\pi x} + \frac{\sin(x\pi)}{\pi} \sum_{n \geq 1} (-1)^n \left[ \frac{e^{int}}{x-n} + \frac{e^{-int}}{x+n} \right]$ .

2.  $f$  est de Classe  $C^1$ - par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

On applique le Théorème de Dirichlet : La série de Fourier de  $f$  converge simplement vers

$$f_r : t \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in ]-\pi, \pi[ \\ \frac{f(-\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2} = \cos(x\pi) & \text{si } t = -\pi \end{cases}$$

3. Pour  $t = \pi$ ,

$$f_r(\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \cos(x\pi) = \frac{\sin(x\pi)}{\pi x} + \frac{\sin(x\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$$

4. a) i)  $\left| \frac{2x}{x^2 - n^2} \right| \leq \frac{2u}{n^2 - 1}$  pour  $n \geq 2$ , donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{2x}{x^2 - n^2}$  converge normalement sur  $]0, u]$

ii) On intègre sur  $]0, u]$ ; l'égalité de la question 3 on obtient,

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{x\pi \cos(x\pi) - \sin(\pi x)}{x \sin(\pi x)} dx &= \left[ \text{Log} \left( \frac{\sin(\pi x)}{x} \right) \right]_{x \rightarrow 0}^{x=u} = \text{Log} \left( \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^u \frac{2x}{x^2 - n^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Log} \left( 1 - \frac{u^2}{n^2} \right). \end{aligned}$$

iii)  $\text{Log} \left( \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \text{Log} \left( 1 - \frac{u^2}{n^2} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Log} \left( \prod_{n=1}^N \left( 1 - \frac{u^2}{n^2} \right) \right)$  donc

$$\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \left( 1 - \frac{u^2}{n^2} \right)$$

b) i)  $G_n(u)G_n(1-u) = \frac{n}{n+1-u} (1-u) \left[ \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{u^2}{k^2} \right) \right]^{-1}$

Par passage à la limite et en utilisant 4-a)-iii) on obtient  $G(u)G(1-u) = \frac{\pi u(1-u)}{\sin(\pi u)}$

ii) On a,  $G(u) = e^{F(u) - \gamma u}$ . On remplace dans la relation précédente on obtient

$$F(u) + F(1-u) = \gamma + \text{Log} \left( \frac{\pi u(1-u)}{\sin(\pi u)} \right)$$

c) En faisant tendre  $u$  vers 0 dans 4-b)-ii), on obtient  $F(1) = \gamma$ .

Pour  $u = \frac{1}{2}$  on a  $2F\left(\frac{1}{2}\right) = \gamma + \left(\frac{\pi}{4}\right)$

## Sixième partie

1.  $\frac{2x^2}{x^2 - n^2} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k}}, \quad R = n$

2.  $\left| \varphi_N\left(\frac{x}{n}\right) \right| = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{x^{2k}}{n^{2k}} \leq \frac{1}{n^{2N}} \sum_{k=N}^{\infty} x^{2k} = \frac{x^{2N}}{1-x^2} \frac{1}{n^{2N}}$

d'où  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_N\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_N\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \zeta(2N) \frac{x^{2N}}{1-x^2}$

3. On a  $\pi x \cotg \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 - n^2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{x^{2k}}{n^{2k}} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_N\left(\frac{x}{n}\right) =$

$1 - 2 \sum_{k=1}^{N-1} x^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_N\left(\frac{x}{n}\right)$

Or d'après 2.  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_N\left(\frac{x}{n}\right) = 0$  donc

$\pi x \cotg \pi x = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) x^{2k}$

4. On a  $\cotg x - 2 \cotg(2x) = \tg x$ .

5. On a :

\* Si  $x \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$   $x \cotg(x) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) \frac{x^{2k}}{\pi^{2k}}$

et

\* Si  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \setminus \{0\}$   $2x \cotg(2x) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \zeta(2k) \frac{x^{2k}}{\pi^{2k}}$ .

donc  $\tg x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} (2^{2k} - 1) x^{2k-1}$ , vraie pour  $x = 0$ .

On a  $\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} (2^{2k} - 1) \sim \frac{2^{2k}}{\pi^{2k}}$ .

En utilisant le règle de D'Alembert pour les séries numériques on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2k+3} |x^{2k+3}|}{\pi^{2k+2}} \frac{\pi^{2k}}{2^{2k+1} |x^{2k+1}|} = \frac{4x^2}{\pi^2}.$$

Donc  $R = \frac{\pi}{2}$ .

6. On a  $\tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow \tg'(0) = 1$  et  $\frac{\tg^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{3}$ .

Par unicité du développement en série entière on obtient  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  et  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ .