REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Recherche
Scientifique et de la Technologie

Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2004

Concours Mathématiques et Physique

Epreuve de Mathématiques I

Date : Lundi 07 Juin 2004	Heure : 8 H	Durée : 4 Heures	Nb pages : 4

Barème: I (2.5 pts); II (5 pts); III (3.5 pts); IV (3.5 pts); V (3 pts); VI (2.5 pts);

L'usage des calculatrices est strictement interdit.
Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

On considère les deux fonctions suivantes: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, définie pour $x \in]1, +\infty[$ et $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, définie pour $x \in]-1, +\infty[$, avec $g_n(x) = \frac{x}{n} - \text{Log}(1 + \frac{x}{n})$.

Partie I

1. Montrer que
   a) ζ est définie et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.
   b) $\lim_{x \mapsto 1^+} \zeta(x) = +\infty$. **(On pourra remarquer que** $\zeta(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$, $\forall\, x > 1$ **et** $\forall\, N \in \mathbb{N}^*$**).**
   c) $\lim_{x \mapsto +\infty} \zeta(x) = 1$.
   d) ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
   e) $\forall\, x > 1$, $\frac{1}{(x-1)} \leq \zeta(x) \leq \frac{x}{x-1}$. **(On pourra comparer avec une intégrale)**
2. En déduire un équivalent simple de ζ au voisinage de 1^+.

Partie II

1. Montrer que le domaine définition de F est $]-1, +\infty[$.

2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} g'_n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1,+\infty[$.

3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme de la somme d'une série.

4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et donner l'expression de ses dérivées successives sous forme de sommes de séries.

5. Montrer que $F^{(k)}(0) = (-1)^k(k-1)!\zeta(k)$ pour tout entier $k \geq 2$.

6. On pose $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \operatorname{Log} n$

   a) Montrer que $\gamma_{n+1} - \gamma_n = g_n(1) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

   b) Montrer que $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est convergente et que sa limite γ vaut $F(1)$.

7. a) Donner le développement en série entière à l'origine de l'application $x \longmapsto \operatorname{Log}(1+x)$. Préciser le rayon de convergence.

   b) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Écrire le développement en série entière à l'origine de g_n.

8. Soient N un entier supérieur ou égale à 2 et x dans $]-1,1]$. On pose

$$\psi_N(x) = \sum_{k=N}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}.$$

   a) Soit $x \in [0,1]$, montrer que

   i) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\psi_N(\frac{x}{n})\right| \leq \frac{1}{Nn^N}$

   ii) $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \psi_N(\frac{x}{n})\right| \leq \frac{\zeta(N)}{N}$.

   b) Soit $x \in]-1,0]$, montrer que

   i) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\psi_N(\frac{x}{n})\right| \leq \frac{1}{Nn^N}\frac{1}{1+x}$,

   ii) $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \psi_N(\frac{x}{n})\right| \leq \frac{\zeta(N)}{N}\frac{1}{1+x}$.

   c) En déduire que $\forall\, x \in]-1,1], \quad \lim_{N\mapsto+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_N(\frac{x}{n}) = 0$.

9. Montrer alors que $\forall\, x \in]-1,1], \quad F(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} x^k$.

10. Donner le rayon de convergence de la série $\sum_{k\geq 2} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} x^k$, retrouver l'expression de $F^{(k)}(0)$ en fonction de $\zeta(k)$.

Partie III

Pour $k \geq 2$, on pose $f_k(x) = \frac{E(x)}{x^{k+1}}$, avec $E(x)$ la partie entière du réel x : $(E(x) \leq x < E(x)+1.)$

1. Montrer que f_k est intégrable sur $[1,+\infty[$.

2. Calculer $U_n(k) = \int_n^{n+1} f_k(x)dx, \quad n \geq 1$.

3. Montrer que $\int_1^{+\infty} f_k(x)dx = \frac{\zeta(k)}{k}$.

   (On pourra remarquer que pour $N \geq 2, \quad \int_1^{N+1} f_k(x)dx = \sum_{n=1}^{N} U_n(k)$**).**

4. Soit $V_k = \displaystyle\int_2^{+\infty} f_k(x)dx$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2}(-1)^k V_k$ est absolument convergente.

On pose alors $V = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k V_k$.

5. a) Exprimer V_k en fonction de $\dfrac{\zeta(k)}{k}$.

b) En déduire que $F(1) = V - \mathrm{Log}\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{2}$.

6. Soit ϕ la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par: $\phi(x) = \dfrac{E(x)}{x^2(1+x)}$.

a) Montrer que ϕ est intégrable sur $[2, +\infty[$.

b) Montrer que $V = \displaystyle\int_2^{+\infty} \phi(x)dx$.

c) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \phi(x)dx$.

d) Retrouver alors le résultat $F(1) = V - \mathrm{Log}\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{2}$.

Partie IV

Soit $(G_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $]-1, +\infty[$ par:

$$G_n(x) = \frac{n!n^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

Soit J une fonction définie sur $]0, +\infty[$ vérifiant les propriétés suivantes :

p_1 : $J(x) > 0, \quad \forall\, x > 0$,
p_2 : $J(x+1) = xJ(x), \quad \forall\, x > 0$,
p_3 : $J(1) = 1$,
p_4 : la fonction $x \mapsto \mathrm{Log}(J(x))$ est convexe sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que $\forall\, x \in]-1, +\infty[$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Log}(G_n(x)) = -x\gamma_n + \sum_{k=1}^{n} g_k(x).$$

2. Soit G la limite simple de la suite $(G_n)_{n\geq 1}$ sur $]-1, +\infty[$. Montrer que:

a) pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\quad G(x) = e^{F(x) - \gamma x}$.

b) pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\quad G(x+1) = (x+1)G(x)$.

c) la restriction sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{G(x)}{x}$ vérifie les propriétés p_1, p_2, p_3, p_4.

3. Calculer $J(n)$ et $G(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. On rappelle que si h est une fonction convexe réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; alors $\forall\, x, y$ et $z \in I$ tels que $x < y < z$; on a:

$$\frac{h(y) - h(x)}{y - x} \leq \frac{h(z) - h(x)}{z - x} \leq \frac{h(z) - h(y)}{z - y}.$$

a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $x \in]0, 1[$. Montrer que

i) $\mathrm{Log}(\dfrac{J(n)}{J(n-1)}) \leq \dfrac{1}{x}\mathrm{Log}(\dfrac{J(n+x)}{J(n)}) \leq \mathrm{Log}(\dfrac{J(n+1)}{J(n)})$.

(On pourra remarquer que $n - 1 < n < n + x < n + 1$.)

ii) $(n-1)!(n-1)^x \leq J(n+x) \leq n^x(n-1)!$.

iii) $J(p+x) = J(x)\displaystyle\prod_{j=0}^{p-1}(x+j), \quad p \in \mathbb{N}^*$.

iv) $\dfrac{n}{n+x}J(x) \leq \dfrac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \leq J(x).$

b) Montrer alors que: $\forall\, x \in]0,1]$, $J(x) = \dfrac{G(x)}{x}$.

c) Soit $x \in]1,+\infty[$, on suppose que x n'est pas entier, on pose $p = E(x)$.
Montrer que $G(x) = x(x-1)\cdots(x-p+1)G(x-p)$.

d) En déduire que $x \mapsto \dfrac{G(x)}{x}$ est l'unique fonction vérifiant les propriétés p_1, p_2, p_3, p_4.

Partie V

Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on définit la fonction $2\pi-$ périodique, f par: $f(t) = e^{ixt}, \quad t \in [-\pi,\pi[$.

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. Préciser la nature de la série obtenue et sa somme.
3. Montrer que
$$\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}.$$
4. Dans toute la suite u désigne un réel de $]0,1[$.

a) Montrer que

i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2x}{x^2-n^2}$ converge uniformément sur $]0,u]$.

ii) $\displaystyle \mathrm{Log}(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Log}(1-\frac{u^2}{n^2})$.

iii) $\displaystyle \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} = \lim_{N\mapsto+\infty}\prod_{n=1}^{N}(1-\frac{u^2}{n^2})$.

b) Montrer que

i) $G(u)G(1-u) = \dfrac{\pi u(1-u)}{\sin(\pi u)}$.

ii) $F(u) + F(1-u) = \gamma + \mathrm{Log}\left(\dfrac{\pi u(1-u)}{\sin(\pi u)}\right)$.

c) Retrouver alors $F(1) = \gamma$ et montrer que $F(\frac{1}{2}) = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{\pi}{4}$.

Partie VI

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, déterminer le développement en série entière à l'origine de l'application $x \mapsto \dfrac{2x^2}{x^2-n}$
Préciser le rayon de convergence.
2. Pour $x \in]-1,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi_N(x) = \displaystyle\sum_{k=N}^{\infty} x^{2k}$.
Montrer que
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_N(\frac{x}{n})\right| \leq \zeta(2N)\frac{x^{2N}}{1-x^2}.$$
3. Montrer alors que: $\forall\, x \in]-1,1[, x \neq 0$,
$$\pi x \mathrm{cotg}\pi x = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)x^{2k}.$$
4. Montrer que $\mathrm{tg}x = \mathrm{cotg}x - 2\mathrm{cotg}(2x)$.
5. Montrer que le développement en série entière à l'origine de $x \mapsto \mathrm{tg}x$ est
$$\mathrm{tg}x = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}(2^{2k}-1)x^{2k-1}.$$
Préciser le rayon de convergence.
6. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \mathrm{tg}x$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. En déduire $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$