REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
de la Recherche Scientifique et de la Technologie

Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session : Juin 2004

Concours en Mathématiques Physique
Epreuve de Mathématiques II

Durée : 3 heures	**Date : 12 Juin 2004**	**Heure : 8 H**	**Nb pages : 5**
Barème :	**Partie I : 5 pts**	**Partie II : 9 pts**	**Partie III : 6 pts**

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

On désigne par $(E, < / >)$ un espace préhilbertien réel. On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire $< / >$.
Pour tout sous espace vectoriel F de E, on désigne par $F^\perp$ l'orthogonal de F c'est à dire $F^\perp = \{x \in E \text{ tel que } < x/y >= 0 \ \forall y \in F\}$.
Soient n un entier non nul et $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice de Gram de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ la matrice

$$G(u_1, u_2, ..., u_n) = \begin{pmatrix} < u_1/u_1 > & < u_1/u_2 > & \dots & < u_1/u_n > \\ < u_2/u_1 > & < u_2/u_2 > & \dots & < u_2/u_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < u_n/u_1 > & < u_n/u_2 > & \dots & < u_n/u_n > \end{pmatrix}$$

le déterminant de $G(u_1, u_2, ..., u_n)$ est appelé déterminant de Gram de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ et est noté $g(u_1, u_2, ..., u_n)$.

Partie I

Soient n un entier non nul et $(u_1, ..., u_n)$ n vecteurs de E.

1) Montrer que si la famille de vecteurs $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est liée alors $g(u_1, u_2, ..., u_n) = 0$.

2) On suppose que la famille de vecteurs $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre et on désigne par H le sous espace vectoriel engendré par $(u_i)_{1\leq i\leq n}$. On considère $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de H et f l'endomorphisme de H tel que $f(e_i) = u_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et A la matrice de f dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.
Montrer que $G(u_1, u_2, ..., u_n) = {}^tAA$.
3) En déduire que la famille de vecteurs $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre, si et seulement si $g(u_1, u_2, ..., u_n) > 0$.

4) On suppose que la famille de vecteurs $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthonormée et on désigne par H le sous espace vectoriel de base $\mathcal{B}=(u_i)_{1\leq i\leq n}$. Soit b une forme bilinéaire symétrique sur H. On note $\mathcal{A}=\mathcal{M}(b,\mathcal{B})$ la matrice de b dans la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P, éléments de $\mathcal{M}_n(R)$, telles que

$$^tP\mathcal{A}P=D.$$

b) Soit $\mathcal{B}_1$ une autre base de H et $\mathcal{Q}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$. Ecrire $\mathcal{M}(b,\mathcal{B}_1)$ en fonction de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{Q}$.

c) On désigne par $\mathcal{B}'=\{v_1,v_2,...v_n\}$ la base de H telle que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est donnée par P. Montrer que :

$$\mathcal{M}(b,\mathcal{B}')=D.$$

d) Montrer que

$$G(v_1,v_2,...,v_n)=I.$$

e) En déduire que $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ est orthonormale pour le produit scalaire $<\ /\ >$ et que $b(v_i,v_j)=0$ pour $i\neq j$.

Partie II

Soit F un sous espace vectoriel de E. Pour tout $a\in E$, on note :

$$d(a,F)=\inf_{y\in F}\|a-y\|.$$

1) a) Soit $z\in F$. Montrer que :

$$\|a-z\|=d(a,F),\ \text{si et seulement si, } a-z\in F^{\perp}.$$

b) Montrer que, s'il existe $z\in F$ tel que $\|a-z\|=d(a,F)$, alors z est unique.

2) On suppose dans cette question que la dimension de F est finie.

a) Montrer que

$$E=F\oplus F^{\perp}.$$

b) Montrer que, pour tout $x\in E$, il existe un unique vecteur $y\in F$ tel que :

$$\|x-y\|=d(x,F).$$

On note

$$y=\Pi_F(x).$$

c) Soient $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ une base de F, $x\in E$ et $y=\Pi_F(x)=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$.

Montrer que les composantes y_i, pour i compris entre 1 et n, sont données par le système :

$$G(e_1,e_2,...,e_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}<x/e_1>\\<x/e_2>\\\vdots\\<x/e_n>\end{pmatrix}$$

d) Soit $x\in E$.

i) Montrer que :

$$<x/x>=d(x,F)^2+<\Pi_F(x)/\Pi_F(x)>.$$

ii) Montrer que pour tout entier i entre 1 et n, on a :

$$< e_i/x >=< e_i/\Pi_F(x) > .$$

iii) Montrer que : $g(e_1, e_2, ...e_n, x) = d(x, F)^2 g(e_1, e_2, ...e_n)$.
iv) En déduire que :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{g(e_1, e_2, ...e_n, x)}{g(e_1, e_2, ...e_n)}}.$$

3) On suppose dans cette question que F est un sous espace vectoriel de E de dimension quelconque vérifiant :

Toute suite de Cauchy de F, converge dans F .

a) Montrer que, $\forall\ x,\ y \in F$:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

b) Soit $a \in E$. Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in N} \subset F$ telle que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} ||a - y_n|| = d(a, F).$$

c) Montrer que la suite $(y_n)_{n\in N}$ est de Cauchy dans F.
d) En déduire qu'il existe $b \in F$, tel que :

$$||a - b|| = d(a, F).$$

4) On suppose dans cette question que $E = R[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans R. On munit E du produit scalaire usuel défini par : pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, $< P/Q >= \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$. Soit l'hyperplan H défini par :

$$H = \{P = \sum_{i=0}^{deg(P)} a_i X^i \text{ tel que } \sum_{i=0}^{deg(P)} a_i = 0\}$$

et soit $Q = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i X^i \in H^\perp$.
a) Montrer que $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_p$.
b) En considérant le polynôme $P = Q - \alpha_0(p + 1)X^{p+1}$, montrer que $Q = 0$.
c) En déduire que :

$$H \oplus H^\perp \neq E.$$

Partie III

Dans cette partie on se place sur $E = \mathcal{C}([0, \frac{\pi}{2}], R)$ l'espace des applications continues de $[0, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs dans R, muni du produit scalaire :

$$(f, g) \longrightarrow < f/g >= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)sinxdx.$$

On note $||.||$ la norme associée à ce produit scalaire.
Pour λ réel strictement positif, on note p_λ l'élément de E défini par : $\forall\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $p_\lambda(t) = cos^\lambda t$.
Soit $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs,non entiers et vérifiant

$$\lim_{j \longrightarrow +\infty} \lambda_j = +\infty \text{ et } \sum_{j\geq 1} \frac{1}{\lambda_j} \text{ est une série divergente.}$$

Pour n un entier non nul, on note F_n le sous espace vectoriel engendré par la famille $\{p_{\lambda_i}\ ,\ 1 \leq i \leq n\}$ et $F = \bigcup_{n\geq 1} F_n$.

1) Vérifier que F_n est un sous espace vectoriel de E de dimension n.

2) Soit p un entier naturel non nul. $a_1, a_2, ..., a_p, b_1, b_2, ..., b_p$ des réels strictement positifs tels que pour tout i, pour tout j, $i \neq j \Longrightarrow b_i \neq b_j$.
Le but de cette question est de calculer le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_p(R)$ de terme général $(\frac{1}{a_i+b_j})_{1\leq i,j\leq p}$. Ce déterminant sera noté $C(a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_p)$ et appelé le déterminant de Cauchy.

a) Soit $Q(X) = \dfrac{(X - a_1)...(X - a_{p-1})}{(X + b_1)...(X + b_p)}$.
Expliciter la décomposition en éléments simples de $Q(X)$.

b) On note D le déterminant d'ordre p :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & Q(a_1) \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{p-1}} & Q(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & Q(a_p) \end{vmatrix}$$

Montrer, à l'aide de a), et en calculant D par deux méthodes différentes que :

$$Q(a_p)C(a_1, ..., a_{p-1}, b_1, ..., b_{p-1}) = \frac{\prod_{i=1}^{i=p-1}(a_i + b_p)}{\prod_{i=1}^{i=p-1}(b_p - b_i)} C(a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_p).$$

c) En déduire que :

$$C(a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_p) = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq p}(a_j - a_i) \prod_{1\leq i<j\leq p}(b_j - b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq p}(a_i + b_j)}.$$

3) Soit k un entier naturel fixé pour toute la suite du problème. Pour n un entier non nul, on note :

$$u_n^k = (d(cos^k t, F_n))^2.$$

Exprimer u_n^k en fonction de déterminant de Gram.

4) a) On note $\lambda_0 = k$ et $\mu_i = \lambda_i + \frac{1}{2}$, pour $i \in \{0, 1, ..., n\}$.
Montrer que :

$$u_n^k = \frac{C(\mu_0, ..., \mu_n, \mu_0, ..., \mu_n)}{C(\mu_1, ..., \mu_n, \mu_1, ..., \mu_n)}.$$

b) En déduire que :

$$u_n^k = \frac{1}{1+2k}\prod_{i=1}^{i=n}(1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k})^2.$$

c)
i) Montrer qu'il existe un entier naturel non nul N tel que : $\forall\ i \geq N,\ 1-\frac{2k+1}{1+\lambda_i+k} > 0$.
ii) Quelle est la nature de la série $\sum_{i\geq N} \ln(1-\dfrac{2k+1}{1+\lambda_i+k})$.
d) Montrer que u_n^k tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.
e)
i) Démontrer que :

$$\forall \epsilon > 0\ ,\ \exists n \in N^*\ ,\ \exists (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n \text{ tels que } \|p_k - \sum_{i=1}^{n} a_i p_{\lambda_i}\| \leq \epsilon.$$

ii) En déduire à l'aide du théorème d'approximation de Weierstrass, que toute fonction f de E est limite d'une suite d'éléments de F.