

Concours Mathématiques et Physique, Physique et Chimie, Technologie et
Biologie et Géologie
Epreuve d'Informatique

Date : Mardi 14 Juin 2005 Heure : 15 H Durée : 2 H Nombre de pages : 4

Barème : Exercice 1 : 4 points Exercice 2 : 4 points Problème : 12 points

L'usage des calculatrices est interdit.
Les exercices 1, 2 et le problème sont indépendants.

Exercice 1 :

Soit S le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2mx + 3y - 2z = 3 \\ x + y + z = m \\ 5x + 4my + 2z = 0 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

Ecrire les commandes Maple permettant de :

- 1) Définir S .
- 2) Résoudre le système S de deux manières :
 - 2-1 en utilisant la commande *solve*
 - 2-2 en utilisant la bibliothèque de fonctions « *linalg* ». On notera par A la matrice du système et b le vecteur second membre.
- 3) Calculer le déterminant k de A .
- 4) Trouver les racines m_1 et m_2 de k .
- 5) Déterminer la matrice IA l'inverse de A , sachant que IA n'est définie que pour les valeurs de $m \neq m_1$ et $m \neq m_2$.
- 6) Soit la matrice B définie par :

$$B = \begin{pmatrix} x + y & x + 2y & x + 3y \\ 2x + y & 2x + 2y & 2x + 3y \\ 3x + y & 3x + 2y & 3x + 3y \end{pmatrix}$$

- 6-1 Définir la fonction $f(i, j)$ permettant de construire les éléments de B avec i indice de ligne et j indice de colonne.
- 6-2 Construire B en utilisant la fonction f définie en 6-1.
- 7) Calculer et afficher les produits matriciels AB et AB^T (B^T désigne la matrice transposée de B).

Exercice 2 :

Soit n un entier naturel, on définit la suite polynomiale d'ordre n , par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} P_0(t) = 1 \\ P_1(t) = t \\ P_n(t) = \frac{2n-1}{n}t P_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(t) \end{cases} \quad \text{Pour } n > 1$$

- 1) Ecrire une procédure Maple nommée *Legendre* qui reçoit comme paramètres t et n , et retourne comme résultat du polynôme $P_n(t)$ sous forme développée. On utilisera la commande prédéfinie *expand* de Maple.
- 2) Ecrire la commande Maple permettant de représenter sur le même graphique, l'allure des polynômes $P_4(t)$, $P_5(t)$ et $P_6(t)$ pour $-1 \leq t \leq 1$.

Problème :

Soient A et B deux tableaux à une dimension de N entiers strictement positifs. On se propose de définir, à partir des tableaux A et B triés par ordre décroissant, les polynômes P et Q fonction de x et y , développés selon les puissances décroissantes de x puis selon les puissances décroissantes de y en utilisant les définitions suivantes :

$$P = \sum_{i=1}^N A[i]x^{B[i]} + \sum_{i=1}^N B[i]y^{A[i]}$$
$$Q = \sum_{i=1}^N B[i]x^{A[i]} + \sum_{i=1}^N A[i]y^{B[i]}$$

Exemple :

Si A et B sont deux tableaux à 4 éléments :

$$A \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 4 \\ \hline \end{array} \quad B \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Les tableaux A et B triés par ordre décroissant sont :

$$A \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \quad B \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Les polynômes P et Q définis à partir de A et B triés sont :

$$P = 5x^6 + 4x^4 + 2x^3 + x + 6y^5 + 4y^4 + 3y^2 + y$$
$$Q = 6x^5 + 4x^4 + 3x^2 + x + 5y^6 + 4y^4 + 2y^3 + y$$

Travail Demandé :

Partie A : Algorithmique

On utilisera la constante NMAX et le type TAB définis par :

CONSTANTE NMAX=20

TYPE TAB = TABLEAU [1..NMAX] d'ENTIER

Exemple : Si P est un polynôme défini par :

$$P = 5x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4y^5 + 3y^3 + 2y^2 + y$$

Le format d'affichage du polynôme P sera :

$$P = 5x^4+3x^3+2x^2+x+4y^5+3y^3+2y^2+y$$

Cette procédure prend comme paramètres :

N : entier	paramètre donné passé par valeur
A : TAB	paramètre donné passé par valeur
B : TAB	paramètre donné passé par valeur.

5) Ecrire un algorithme principal **AFF_POLY_ORD** qui :

- permet de saisir le nombre N d'éléments, d'un tableau à une dimension, en appelant la fonction **TAILLE** écrite en 1) de la partie A.
- remplit un tableau A ensuite un tableau B avec des entiers strictement positifs en appelant la procédure **REEMPLIR_TABLEAU** écrite en 2) de la partie A.
- trie le tableau A ensuite le tableau B en utilisant la procédure **TRI_TABLEAU** écrite en 3-2) de la partie A.
- affiche les polynômes P et Q (décrits au début du problème) selon les puissances décroissantes en x puis en y en appelant la procédure **AFFICH_POLY** écrite en 4) de la partie A.

Partie B : Maple

- 1) Traduire en Maple la procédure algorithmique **COMPTAGE** écrite en 3-1 de la partie A.
- 2) Traduire en Maple la procédure algorithmique **TRI_TABLEAU** écrite en 3-2 de la partie A.
- 3) Donner la commande Maple permettant d'ordonner un polynôme P selon les puissances décroissantes de x .
- 4) Ecrire la commande Maple qui convertit le polynôme P en une fonction f à deux variables x et y .
- 5) Donner la commande Maple pour définir le domaine de définition de la fonction f .
- 6) Donner la commande Maple pour définir l'expression de la dérivée première de f par rapport à x .
- 7) Donner la commande Maple pour définir la fonction dérivée seconde de f par rapport à y .