Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session : Juin 2005

Concours en Mathématiques Physique

Correction de l'Epreuve de Mathématiques I

Exercice 29 pts

$\boxed{\text{A}}$ 10 pts

2

1. En partant de $\dfrac{-2e^{ix}}{(e^{ix}-e^{a})(e^{ix}-e^{-a})}$, on vérifie la formule demandée.

---

2. En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{-2X}{(X-e^{a})(X-e^{-a})}$ et en utilisant Question 1) on obtient

$$\varphi(x) = \frac{1}{\text{sh}a}\left\{\frac{1}{1-e^{ix}e^{-a}} + \frac{e^{-a}e^{-ix}}{1-e^{-ix}e^{-a}}\right\}.$$

Donc, puisque $\left|e^{\pm ix}e^{-a}\right| = e^{-a} < 1$, on aura

4

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{\text{sh}a}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} e^{inx}e^{-na} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-inx}e^{-na}\right\}\\ &= \frac{1}{\text{sh}a} + \frac{2}{\text{sh}a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-na}\cos(nx).\end{aligned}$$

INSTITUT PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEURS SFAX
BIBLIOTHEQUE

D'où

$$\gamma_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\text{sh}a}e^{-na} & \text{si} \quad n \geq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{\text{sh}a} & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}.$$

---

3. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\left|e^{-na}\cos(nx)\right| \leq e^{-na}$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-na}\cos(nx)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, il s'en suit que

4

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos(nx)dx &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\text{sh}a} + \frac{2}{\text{sh}a}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-ka}\cos(kx)\right)\cos(nx)dx\\ &= \frac{1}{\text{sh}a}\int_0^{2\pi}\cos(nx)dx + \frac{2}{\text{sh}a}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-ka}\int_0^{2\pi}\cos(kx)\cos(nx)dx.\end{aligned}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ \pi & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

Donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos(nx)dx = \frac{2\pi}{\text{sh}a}e^{-na}.$$

La fonction φ est continue, paire et $2\pi-$ périodique sur $\mathbb{R}$. Ses coefficients de Fourier trigonométriques sont donc pour tout entier naturel n,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\text{sh}a}e^{-na} \quad \text{et} \quad b_n = 0.$$

On applique la formule de Parseval à φ on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^2(x)dx &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \\ &= \frac{1}{\text{sh}^2 a} + \frac{2}{\text{sh}^2 a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2na} \\ &= \frac{\text{ch}a}{\text{sh}^3 a}. \end{aligned}$$

Donc

$$I = 2\pi\frac{\text{ch}a}{\text{sh}^3 a}.$$

$\boxed{\text{B}}$ 19 points

2

1. La fonction φ est paire donc son développement éventuel est de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^{2p}.$$

4

2. $b_0 = \varphi(0) = \dfrac{1}{\text{ch}a - 1}$.
   $b_1 = \dfrac{\varphi''(0)}{2} = -\dfrac{1}{2}(\text{ch}a - 1)^{-2}$.

3

3. On a

$$\text{ch}a - \cos x = \text{ch}a - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

En utilisant l'égalité

$$\varphi(x)(\text{ch}a - \cos x) = 1,$$

Le produit de Cauchy de ce deux séries donne

$$b_0(\mathrm{ch}a-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\mathrm{ch}a-1)b_n+\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!}b_{n-p}\right\}x^{2n}=1.$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$b_n=\frac{1}{\mathrm{ch}a-1}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{(2p)!}b_{n-p}.$$

---

4. On a $b_o=\dfrac{1}{\mathrm{ch}a-1}$, donc la propriété est vraie pour $n=0$. Supposons qu'elle est vraie jusqu'a un certain ordre $n-1$, $n\in\mathbb{N}^*$.

2

$$\begin{aligned}|b_n| &\le \frac{1}{\mathrm{ch}a-1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(2p)!}|b_{n-p}|\\ &\le \frac{1}{(\mathrm{ch}a-1)^2}\sum_{p=1}^{n}\frac{a^{-2(n-p)}}{(2p)!}\\ &\le \frac{a^{-2n}}{(\mathrm{ch}a-1)^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{a^{2p}}{(2p)!}\\ &\le \frac{a^{-2n}}{(\mathrm{ch}a-1)^2}(\mathrm{ch}a-1)=\frac{a^{-2n}}{\mathrm{ch}a-1}\end{aligned}$$

---

5. Le rayon de convergence de la série

2

$$\sum_{n\ge0}\frac{a^{-2n}}{\mathrm{ch}a-1}x^{2n}$$

est a, donc $R\ge a$.

---

6. (a) On pose $X=e^{iz}$. L'équation $\cos z=\mathrm{ch}a$ est équivalente à

$$X^2-2\mathrm{ch}aX+1=0,$$

dont les solutions sont $X_1=e^a$ et $X_2=e^{-a}$. On pose $z=x+iy$, on obtient

2

$$e^{iz}=e^{\pm a}\Leftrightarrow e^{ix}e^{-y}=e^{\pm a}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\pm a\\ x=2k\pi,\quad k\in Z\end{cases}.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\{z=2k\pi\pm ia,\ k\in Z\}.$$

(b) i. En utilisant la relation

$$b_n = \frac{1}{\text{ch}a - 1} \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!} b_{n-p},$$

2

et le produit de Cauchy des deux séries $1+\sum_{p\geq 1} b_p z^{2p}$ et $\text{ch}a-1+\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^{p+1}z^{2p}}{(2p)!}$, on obtient la formule demandée.

---

ii. Pour $z = ia$, on a $\cos z = \text{ch}a$, donc

$$\lim_{|z|\mapsto a} \left|S(z)\right| = +\infty.$$

2

La série $\sum_{p\geq 0} b_p z^{2p}$ est donc divergente pour $z = ia$, ce qui donne $R \leq a$. D'où $R = a$.

Problème

Partie I 35 pts

---

1. (a) On a $t \mapsto |f(t)|e^{-tx}$ est continue sur $[0, +\infty[$. En plus $\forall x \geq x_0$, $|f(t)|e^{-tx} \leq |f(t)|e^{-tx_0}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $t \mapsto |f(t)|e^{-tx}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(b) On pose

$$g(x, t) = f(t)e^{-tx}.$$

On a :
g est continue sur $[x_0, +\infty[\times[0, +\infty[$.
$\forall (x, t) \in [x_0, +\infty[\times[0, +\infty[$,

3

$$|g(x, t)| \leq |f(t)|e^{-tx_0}$$

L'application $t \mapsto |f(t)|e^{-tx_0}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Donc L est contiue sur $[x_0, +\infty[$.

(c) On a :
$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -tf(t)e^{-xt}$ est contiue sur $]x_0, +\infty[\times[0, +\infty[$.
Soit $a > x_0$, pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[$ on a

3

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leq t|f(t)|e^{-at} \leq |f(t)|e^{-x_0 t} t e^{(x_0-a)t}$$

or $t \mapsto te^{(x_0-a)t}$ est bornée sur $[0,+\infty[$, donc il existe M tel que

$$|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)| \leq M|f(t)|e^{-x_0 t}$$

$t \mapsto |f(t)|e^{-tx_0}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc L est de classe C^1 sur $]x_0,+\infty[$.

---

2. (a) Soit $x > 0$. On a
F est continue sur $[0,+\infty[$.
Pour tout $t \geq 0$,

$$|F(t)| \leq \int_0^{+\infty} |f(s)|e^{-x_0 s}ds = C$$

d'où

4

$$|F(t)e^{-(x-x_0)t}| \leq Ce^{-(x-x_0)t}.$$

Or l'application $t \mapsto Ce^{-(x-x_0)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Donc $t \mapsto F(t)e^{-(x-x_0)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
D'autre part par intégration par partie on trouve

$$\int_0^{+\infty} F(t)e^{-(x-x_0)t}dt = \frac{1}{x-x_0}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{x-x_0}L(x) = 0.$$

(b) On fait le changement de variable $t = -\ln(s)$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} F(t)e^{-(x-x_0)t}dt$ on trouve :

2

$$0 = \int_0^{+\infty} F(t)e^{-(x-x_0)t}dt = \int_0^1 F(-\ln(s))e^{(x-x_0)\ln(s)}\frac{1}{s}ds$$

$$= \int_0^1 F(-\ln(s))s^{x-x_0-1}ds$$

(c) Pour $n \in I\!N$, on pose $x = x_0 + 1 + n > x_0$. On obtient alors

2

$$= \int_0^1 F(-\ln(s))s^n ds = 0$$

(d) $t \mapsto -\ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ et à valeurs dans $[0,+\infty[$, en plus F est continue sur $[0,+\infty[$ donc $t \mapsto F(-\ln(t))$ est continue sur $]0,1]$.

2

En plus $\lim_{t\to 0}(-\ln(t)) = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} f(s)e^{-x_0 s}ds = 0$.
Donc $\lim_{t\to 0} F(-\ln(t)) = 0$ et ainsi $t \mapsto F(-\ln(t))$ est prolongeable par continuité en 0.

(e) La fonction G est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème de Weirstrass il existe une suite $(P_n)_{n\in N}$ de fonctions pôlynomiales qui converge uniformément

sur $[0,1]$ vers la fonction G.
D'autre part, d'après (d) , $\forall n \in I\!N$ on a

$$\int_0^1 G(t)\overline{P}_n(t)dt = 0.$$

La suite de fonctions $(G\overline{P}_n)_{n\in N}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $|G|^2$.

3

D'où :

$$0 = \int_0^1 G(t)\overline{P}_n(t)dt \longrightarrow \int_0^1 |G(t)|^2 dt \text{ quand } n \longrightarrow 0.$$

Ainsi

$$\begin{cases} \int_0^1 |G(t)|^2 dt = 0 \\ |G(t)|^2 \geq 0 \ \ \forall t \in [0,1] \\ G^2 \text{ est continue sur } [0,1]. \end{cases}$$

donc G est nulle sur $[0,1]$.

2

(f) G est nulle sur $[0,1]$ donc F est nulle sur $[0,+\infty[$.
Ainsi la fonction F' est nulle sur $[0,+\infty[$ d'où la fonction f est nulle sur $[0,+\infty[$.

3

3. (a) On a :

$$|f(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}| = |f(u)e^{-u(x_0+r\cos(\theta))}|.$$

Or $\forall\ (r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\beta,\beta[$ on a : $r\cos(\theta) > 0$, d'où

$$|f(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}| \leq |f(u)e^{-ux_0}|$$

qui est intégrable sur $[0,+\infty[$.
D'où la fonction $u \mapsto f(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

4

(b) θ fixé dans $]-\beta,\beta[$.
On pose

$$g(r,u) = f(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}.$$

On a :
g est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
$\forall$(r,u) $\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$,

$$|g(r,u)| \leq |f(u)e^{-x_0u}|$$

qui est intégrable sur $]0,+\infty[$.
$\frac{\partial g}{\partial r}(r,u) = -e^{i\theta}uf(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}$ qui est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. $\forall$(r,u) $\in [a,b]\times]0,+\infty[$,

$$|\frac{\partial g}{\partial r}(r,u)| \leq |f(u)|e^{-ux_0}ue^{-ua\cos(\theta)}.$$

La fonction $u \mapsto ue^{-ua\cos(\theta)}$ est bornée sur $[0,+\infty[$ donc il existe M tel que $\forall u \in]0,+\infty[$, on a

$$|\frac{\partial g}{\partial r}(r,u)| \leq M|f(u)|e^{-ux_0}$$

qui est intégrable sur $]0,+\infty[$.
En conclusion $r \mapsto h(r,\theta)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = \int_0^{+\infty} -e^{i\theta}uf(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}du.$$

(c) r fixé dans $]0,+\infty[$.
On pose

$$k(\theta,u) = f(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}.$$

On a :
k est continue sur $]-\beta,\beta[\times]0,+\infty[$.
$\forall(\theta,u) \in]-\beta,\beta[\times]0,+\infty[$,

$$|k(\theta,u)| \leq |f(u)e^{-x_0u}|$$

3

qui est intégrable sur $]0,+\infty[$.
$\frac{\partial k}{\partial \theta}(\theta,u) = -iure^{i\theta}f(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}$ qui est continue sur $]-\beta,\beta[\times]0,+\infty[$.
L'application $u \mapsto ue^{-ur\cos\beta}$ est bornée par une constante $\widetilde{M}$.
$\forall(\theta,u) \in]-\beta,\beta[\times]0,+\infty[$,

$$|\frac{\partial k}{\partial \theta}(\theta,u)| \leq ru|f(u)|e^{-u(x_0+r\cos(\beta))}$$

$$\leq \widetilde{M}r|f(u)|e^{-x_0u}$$

qui est intégrable sur $]0,+\infty[$.
En conclusion $\theta \mapsto h(r,\theta)$ est de classe C^1 sur $]-\beta,\beta[$ et

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) = \int_0^{+\infty} -ire^{i\theta}uf(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}du.$$

(d) D'après (b) et (c) On a : $\forall(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\beta,\beta[$,

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) - ir\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)$$

2

$$= -ire^{i\theta}\int_0^{+\infty} uf(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}du + ire^{i\theta}\int_0^{+\infty} uf(u)e^{-u(x_0+re^{i\theta})}du = 0.$$

Partie II

$\boxed{\text{A}}$ 20 pts

1. (a) On sait que si pour x réel $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n x}$ converge absolument alors elle est convergente. D'où

$$D_a \subset D_c$$

2

et ainsi

$$\sigma_c \leq \sigma_a.$$

(b) Si a_n est réel positif, alors

$$D_a = D_c$$

2

et ainsi

$$\sigma_c = \sigma_a.$$

2. (a) D'abord $a_n = 1$ réel positif donc $\sigma_c = \sigma_a$. D'aute part pour x réel, $e^{-\ln(n)x} = \frac{1}{n^x}$, ainsi $\sum_{n\geq 1} e^{-\ln(n)x}$ converge ssi $x > 1$. D'où $D_a = D_c =]1, +\infty[$ et donc $\sigma_c = \sigma_a = 1$.

(b) Pour x réel, on a :

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n e^{-\ln(n)x} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge absolument si et seulement si $x > 1$. D'où

$$\sigma_a = 1.$$

D'autre part, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 0$.
D'où $D_c =]0, +\infty[$ et par suite

$$\sigma_c = 0.$$

3. (a) Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^x}$ converge et $\epsilon > 0$.
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^x} = 0.$$

2

D'où il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, on a $|\frac{a_n}{n^x}| \leq 1$.
Ainsi pour tout $n \geq n_0$,

$$|\frac{a_n}{n^{x+1+\epsilon}}| \leq \frac{1}{n^{1+\epsilon}}.$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ converge d'où $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^{x+1+\epsilon}}$ converge absolument.

(b) On a déja montré que $\sigma_c \leq \sigma_a$.
D'autre part, d'après la question précédente on a, pour $\epsilon > 0$,

$$\{x + \epsilon + 1 \text{ tels que } \sum_{n\geq 1} a_n e^{-\ln(n)x} \text{ converge }\} \subset$$

$$\{x \in I\!R \text{ tels que } \sum_{n\geq 1} a_n e^{-\ln(n)x} \text{ converge absolument }\}$$

3 d'où

$$\sigma_a \leq \inf\{x + \epsilon + 1 \text{ tels que } \sum_{n\geq 1} a_n e^{-\ln(n)x} \text{ converge }\}$$

ainsi

$$\sigma_a \leq \sigma_c + 1 + \epsilon \text{ pour tout } \epsilon > 0$$

et enfin

$$\sigma_a \leq \sigma_c + 1.$$

---

4. (a) On a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(n)}{\lambda_n} = b.$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \in I\!N$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$|\frac{\ln(n)}{\lambda_n} - b| \leq \epsilon.$$

2 D'où

$$b - \epsilon \leq \frac{\ln(n)}{\lambda_n} \leq b + \epsilon \text{ pour tout } n \geq n_0$$

et donc

$$\lambda_n \geq \frac{1}{b+\epsilon} \ln(n) \text{ pour tout } n \geq n_0$$

(b) On a $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n x}$ converge d'où la suite $(|a_n e^{-\lambda_n x}|)_n$ est bornée donc il existe $M \in I\!R^+$ tel que

$$\forall n \in I\!N,\ |a_n e^{-\lambda_n x}| \leq M.$$

Ainsi

$$\forall n \in I\!N,\ |a_n e^{-\lambda_n x'}| \leq M e^{-(1+\alpha)(b+\epsilon)\lambda_n}.$$

3 Ce qui donne d'après (a)

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n e^{-\lambda_n x'}| \leq M e^{-(1+\alpha)\ln(n)}$$

$$\leq M \frac{1}{n^{\alpha+1}}.$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{M}{n^{\alpha+1}}$ converge donc $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n x'}$ converge absolument.

(c) On a déja $\sigma_c \leq \sigma_a$ (d'après 1.).
D'autre part, d'après la question précédente on a, pour $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$,

$$\{x + (\epsilon + b)(\alpha + 1) \text{ tels que } \sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n x} \text{ converge } \} \subset$$

$$\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n x} \text{ converge absolument } \}$$

d'où

2

$$\sigma_a \leq \inf\{x + (\epsilon + b)(\alpha + 1) \text{ tels que } \sum_{n\geq 1} a_n e^{-\ln(n)x} \text{ converge } \}$$

ainsi

$$\sigma_a \leq \sigma_c + (\epsilon + b)(\alpha + 1) \text{ pour tout } \epsilon > 0 \text{ et } \alpha > 0$$

et enfin

$$\sigma_a \leq \sigma_c + b.$$

$\boxed{\text{B}}$ 16 points

---

1. Soit $x > \sigma_a$. Comme $\sigma_a = \inf D_a$, il existe $x' \in D_a$ tel que $\sigma_a \leq x' < x$. On a alors $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n x'}$ converge absolument.
D'autre part

2

$$|a_n e^{-\lambda_n x}| = |a_n| e^{-\lambda_n x'} e^{-\lambda_n (x - x')} \leq |a_n| e^{-\lambda_n x'}.$$

Or la série $\sum_{n\geq 1} |a_n| e^{-\lambda_n x'}$ converge donc la série $\sum_{n\geq 1} |a_n e^{-\lambda_n x}|$ converge aussi.

---

2. On pose

$$g_n(x) = a_n e^{-\lambda_n x}.$$

On a
g_n est continue sur $]\sigma_a, +\infty[$.
Soit $b > \sigma_a$.

3

$$\sup_{x \in [b, +\infty[} |g_n(x)| = |a_n| e^{-\lambda_n b}.$$

Or la série $\sum_{n\geq 1} |a_n| e^{-\lambda_n b}$ converge (car $b > \sigma_a$) donc la série $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge normalement et par suite uniformément sur $[b, +\infty[$.
D'où g est continue sur $]\sigma_a, +\infty[$.

3.

$$|a_n e^{-\lambda_n z}| = |a_n e^{-\lambda_n \Re(z)}|$$

2

or $\Re(z) > \sigma_a$ donc d'après la question 1. la série $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n \Re(z)}$ converge absolument.
D'où la série $\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge absolument.

---

4. (a) Pour θ fixé dans $]-\beta,\beta[$, on pose

$$f_n(r) = a_n e^{-\lambda_n(x_0+re^{i\theta})}.$$

On a :
f_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et

$$f_n'(r) = -\lambda_n e^{i\theta} a_n e^{-\lambda_n(x_0+re^{i\theta})}.$$

Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

$$\sup_{r\in[a,b]} |f_n'(r)| = |\lambda_n||a_n|e^{-\lambda_n(x_0+a\cos(\theta))}$$

$$= |\lambda_n|e^{-\lambda_n a\cos(\theta)}|a_n|e^{-\lambda_n x_0}$$

D'autre part $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n a\cos(\theta)} = 0$ donc la suite $\lambda_n e^{-\lambda_n a\cos(\theta)}$ est bornée.
4 D'où il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n e^{-\lambda_n a\cos(\theta)} \leq M$$

Il vient que :

$$\sup_{r\in[a,b]} |f_n'(r)| \leq M|a_n e^{-\lambda_n x_0}|$$

et comme $\sum_{n\geq1} |a_n e^{-\lambda_n x_0}|$ converge, on en déduit que la série $\sum_{n\geq1} f_n'$ converge normalement et par suite uniformément sur tout compact $\subset]0,+\infty[$.
On a aussi la série $\sum_{n\geq1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

En conclusion l'application $r \mapsto f(r,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n(x_0+re^{i\theta})}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\lambda_n e^{i\theta} a_n e^{-\lambda_n(x_0+re^{i\theta})}$$

(b) Pour r fixé dans $]0,+\infty[$, on pose

$$h_n(\theta) = a_n e^{-\lambda_n(x_0+re^{i\theta})}.$$

On a : h_n est de classe C^1 sur $]-\beta,\beta[$ et

$$h_n'(\theta) = -i\lambda_n r e^{i\theta} a_n e^{-\lambda_n(x_0+re^{i\theta})}.$$

3

$$\sup_{\theta\in]-\beta,\beta[} |h_n'(\theta)| = r|\lambda_n||a_n|e^{-\lambda_n x_0}e^{-\lambda_n r\cos(\beta)}$$

$$\leq M|a_n|e^{-\lambda_n x_0}$$

car la suite $(r\lambda_n e^{-\lambda_n r\cos(\beta)})_n$ est une suite bornée ($\lim_{n\longrightarrow+\infty} r\lambda_n e^{-\lambda_n r\cos(\beta)} = 0$).
D'où la série $\sum_{n\geq1} h_n'$ converge uniformément sur $]-\beta,\beta[$.

D'autre part la série $\sum_{n\geq 1} h_n$ converge simplement sur $]-\beta,\beta[$.

En conclusion l'application $\theta \mapsto f(r,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n(x_0+re^{i\theta})}$ est de classe C^1 sur $]-\beta,\beta[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} -i\lambda_n r e^{i\theta} a_n e^{-\lambda_n(x_0+re^{i\theta})}$$

(c) D'après (a) et (b) on a :

2

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) - ir\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = 0.$$