Concours d'entrée aux
écoles d'ingénieurs tunisiennes
Section Mathématiques Physique

Sujet de mathématiques II

Exercice

1) Soit p est un projecteur orthogonal.
L'égalité $p \circ p = p$ est évidente.
De plus, soit $x \in E$. Pour tout $y \in E$, on peut écrire
$\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), y - p(y)\rangle + \langle p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$
et
$\langle x, p(y)\rangle = \langle x - p(x), p(y)\rangle + \langle p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$.
On en déduit que $\langle p(x), y\rangle = \langle p^*(x), y\rangle$ pour tout $y \in E$. Il en résulte que $p = p^*$.
Réciproquement, soit un endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$ et $p^* = p$.
Montrons que $\ker(p) = (\mathrm{Im}(p))^{\perp}$.
Pour tous $x \in \ker(p)$ et $y = p(z) \in \mathrm{Im}(p)$, on a $\langle x, p(z)\rangle = \langle p^*(x), z\rangle = \langle p(x), z\rangle = 0$.
Il en résulte que p est un projecteur orthogonal.

---

2) a) Les égalités
$(g^{-1} \circ p_F \circ g) \circ (g^{-1} \circ p_F \circ g) = g^{-1} \circ p_F \circ g$ et $(g^{-1} \circ p_F \circ g)^* = g^{-1} \circ p_F \circ g$
impliquent que $g^{-1} \circ p_F \circ g$ est un projecteur orthogonal.
De plus, l'égalité $g^{-1} \circ p_F \circ g\,(E) = g^{-1}(F)$ implique que $g^{-1} \circ p_F \circ g = p_{g^{-1}(F)}$.

b) Si $f = p_F \circ g$ alors, on déduit de 1) que
$(p_F \circ g) \circ (p_F \circ g)^* \circ (p_F \circ g) = p_F \circ g \circ g^{-1} \circ p_F \circ p_F \circ g = p_F \circ g$.

c) L'égalité $p_F \circ g = g \circ p_F$ est équivalente à $g^{-1} \circ p_F \circ g = p_F$.
Le résultat découle alors de 2) a).

---

3) a) Il est évident que l'on a
$(f^* \circ f)^* = f^* \circ f$ et $f^* \circ f \circ f^* \circ f = f^* \circ f$.

Par suite, $f^* \circ f$ est un projecteur orthogonal.
Montrons que $\mathrm{Im}(f^* \circ f) = (\ker(f))^{\perp}$.

L'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^* \circ f)$ est triviale.

De plus, pour tout $x \in \ker(f^* \circ f)$ on peut écrire

$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, f^* \circ f(x)\rangle = 0.$

Ce qui implique l'inclusion $\ker(f^* \circ f) \subset \ker(f)$.

On déduit alors de ce qui précède que $\ker(f) = \ker(f^* \circ f)$ et $\mathrm{Im}(f^* \circ f) = (\ker(f))^{\perp}$.

b) Pour tout $x \in (\ker f)^{\perp}$, $f^* \circ f(x) = x$. Par suite,

$\|x\|^2 = \langle f^* \circ f(x), f^* \circ f(x)\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle = \|f(x)\|^2$.

Le résultat en découle.

c) Les sous-espaces $\ker(f)$ et $(\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$ ont même dimension puisque $(\mathrm{Im}\, f) \oplus (\mathrm{Im}\, f)^{\perp} = E$.

Par suite, toute application linéaire g_1 qui envoie une base orthonormée de $\ker(f)$ sur une base orthonormée de $(\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$ convient.

d) Soit $F = (\ker f)^{\perp}$. L'endomorphisme défini par

$g(x) = f(x)$ si $x \in (\ker f)^{\perp}$ et $g(x) = g_1(x)$ si $x \in (\ker f)$ convient.

Problème

Partie I

1) On peut écrire

$$\|AB\| = p \underset{1\leq k,j\leq p}{Sup} \left(\sum_{l=1}^{l=p} |a_{kl}b_{lj}|\right) \leq p^2 \underset{1\leq k,l\leq p}{Sup} |a_{kl}| \underset{1\leq j,l\leq p}{Sup} |b_{lj}| = \|A\|\,\|B\|.$$

---

2) D'après 1), $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

La convergence dans $\mathcal{M}(p, \mathbb{C})$ (qui est de dimension finie) de la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ résulte de celle de la série $\sum \frac{\|A\|^k}{k!}$.

---

3) Si A et B commutent alors $AB^k = B^k A$.

Par suite, $A\left(\sum_{k=0}^{k=n}\frac{B^k}{k!}\right)=\left(\sum_{k=0}^{k=n}\frac{B^k}{k!}\right)A.$

Par passage à la limite, il vient
$A\exp(B)=\exp(B)\,A$ et $\exp(B)\exp(A)=\exp(A)\exp(B)$.

---

4) a) Le calcul donne $A^2+(\det A)\,I_2=0$.

b) On déduit de 4a) que $A^k=0$, pour tout $k\geq 2$.

Il en résulte que $\exp(A)=I_2+A$.

c) On déduit de 4a) que pour tout entier k, $A^{2k}=\alpha^{2k}I_2$ et $A^{2k+1}=\alpha^{2k}A$

Par suite

$$\exp(A)=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}\right)I_2+\tfrac{1}{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)A=ch(\alpha)\,I_2+\frac{sh(\alpha)}{\alpha}A.$$

d) Si $(\det A)=\alpha^2=-(i\alpha)^2$ alors $\exp(A)=\cos(\alpha)\,I_2+\dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha}A.$

---

5) a) On vérifie facilement que $\alpha_n=p_n(a)$ et $\beta_n=\dfrac{p_n(b)-p_n(a)}{b-a}$.

b) On peut écrire $p_n(A)=p_n(a)\,I_p+\dfrac{p_n(b)-p_n(a)}{b-a}[A-aI_p]$.

c) Par passage la limite il vient $\exp(A)=e^aI_p+\dfrac{e^b-e^a}{b-a}[A-aI_p]$.

d) En faisant tendre b vers a dans c) on obtient $\exp(A)=e^a[(1-a)\,I_p+A]$.

---

6) a) La série de terme général $u_n(t)=\dfrac{t^n}{n!}A^n\in\mathcal{M}(p,\mathbb{C})$ converge simplement vers $\exp(tA)$ question I 2).

De plus pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $t\mapsto u_n(t)=\dfrac{t^n}{n!}A^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a $u_n'(t)=\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n$ pour tout réel t.

La convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}$ de la série des dérivées $\sum u_n'(t)$ implique que

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(tA)^k}{k!}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!}A\right).$$

On en déduit que pour tout réel t, $c'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$.

b) On a $d'(t) = 0$, pour tout réel t. (A commute avec $\exp(A)$).

c) Il résulte de la question précédente que $d(1) = d(0)$,
ou encore que $\exp(A)\exp(-A) = I_p$.

---

7) a) Le calcul donne
$\gamma'(t) = \exp(t\,(A+B))\,[B\exp(-tA) - \exp(-tA)B]\exp(-tB)$, pour tout réel t.

b) Si $AB = BA$ alors $B\exp(-tA) - \exp(-tA)B = 0$, d'après la question I 3).
Par suite $\gamma'(t) = 0$, pour tout réel t.
Il en résulte que $\gamma(1) = \gamma(0)$ et que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

---

8) a) En utilisant la question I 5) c), on obtient $\exp(A) = I_2$. et $\exp(B) = I_2$.

b) On a $A + B = \begin{pmatrix} 2i\pi & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
d'après I. 5) c), il vient $\exp(A+B) = I_2 = \exp(A)\exp(B)$.
Or $AB = \begin{pmatrix} 0 & -2i\pi \\ 0 & 4\pi^2 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 2i\pi \\ 0 & 4\pi^2 \end{pmatrix}$

---

9) a) Si T est triangulaire alors T^k est triangulaire et par suite $\exp(T)$ est triangulaire.

b) Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sont les élements diagonaux de la matrice triangulaire T alors $\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_p^k$ sont les élements diagonaux de la matrice triangulaire $T^{\,k}$.
Par suite, les élements diagonaux de $\exp(T)$ sont les nombres
$\exp(\lambda_1), \exp(\lambda_2), ..., \exp(\lambda_p)$ qui sont aussi les valeurs propres de $\exp(T)$.

---

10) a) L'égalité $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$ permet d'écrire que

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(PAP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{k=n} P\frac{A^k}{k!}P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{A^k}{k!}\right)P^{-1}.$$

Par passage à la limite on obtient

$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$.

b) Toute matrice $A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}(p, \mathbb{C})$.

On en déduit, au vu de 10) a), que $\exp(A)$ est semblable à la matrice triangulaire $\exp(T)$.

Or, $\det(\exp(T)) = \exp(tr(T))$.

D'où, $\det(\exp(A)) = \exp(tr(A))$.

Partie II

1) D'après le théorème de décomposition du noyaux, $\mathbb{C}^p = \bigoplus_{j=1}^{j=k} N_j$.

---

2) a) On peut écrire

$$\frac{1}{P_f} = \sum_{j=1}^{j=k}\left[\sum_{l=1}^{l=\alpha_j} \frac{\gamma_{jl}}{(\lambda_j - x)^l}\right] = \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{r_j(x)}{(\lambda_j - x)^{\alpha_j}}\right],$$

où r_j est un polynôme de degré strictement inférieur à α_j.

En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par P_f,

on obtient $\sum_{j=1}^{j=k} r_j q_j = 1$.

b) D'après 2a), $\sum_{j=1}^{j=k} (r_j q_j)(f) = 1(f) = id_p$.

D'où $\Pi_1 + \Pi_2 + ... + \Pi_k = id_p$.

---

3) a) Soit n un entier. Pour tout entier m distinct de $n, (x - \lambda_m)^{\alpha_m}$ divise q_n.

Or $v \in N_m$ équivaut à $(f - \lambda_m id_p)^{\alpha_m}(v) = 0$.

Par suite, pour tout entier m distinct de n et pour tout $v \in N_m$, $\Pi_n(v) = 0$.

b) D'après les deux questions précédentes, on a pour tout $v \in N_m$,

$$\Pi_m(v) = v - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{k} \Pi_j(v) = v.$$

c) Il découle facilement des questions précédentes que

Π_j est le projecteur sur N_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{l=k} N_l$.

---

4) Soit $d = \lambda_1 \Pi_1 + ... + \lambda_k \Pi_k$.

La restriction de d à chaque sous espace vectoriel N_j est égale à $\lambda_j \Pi_j$.

Par suite la restriction de d à chaque sous espace vectoriel N_j est diagonalisable

sur N_j.

On en déduit que d est diagonalisable.

---

5) a) La restriction de n à N_j est l'endomorphisme $f - \lambda_j id_p$.

Par suite, pour tout $v \in N_j$, $n^{\alpha_j}(v) = 0$.

b) Soit $\alpha = \sup\limits_{1 \leq j \leq k} (\alpha_j)$. La décomposition $\mathbb{C}^p = \bigoplus\limits_{l=1}^{l=k} N_l$ implique que $n^\alpha = 0$.

---

6) a) L'endomorphisme d' commute avec $(f - \lambda_j id_p)$.

Par suite, $d' \circ (f - \lambda_j id_p)^{\alpha_j} = (f - \lambda_j id_p)^{\alpha_j} \circ d'$.

Il en résulte que pour tout $v \in N_j$, $d'(v) \in N_j$,

ou encore que N_i est stable par d'.

b) D'après ce qui précède, d' induit un endomorphisme de N_j. De plus, la restriction de d à N_j est l'endomorphisme $\lambda_j id_p$.

On en déduit qu'il existe une base $\mathcal{B}_j$ de N_j dans laquelle les restrictions de d et d' sont simultanément diagonalisables.

En raccordant les bases $\mathcal{B}_j$, $1 \leq j \leq k$; on obtient une base où d et d' sont simultanément diagonalisables.

7) L'existence de n et d tels que $d \circ n = n \circ d$ et $f = d + n$ découle des questions 4) et 5).

Soit un deuxième couple (d', n') tel que $d' \circ n' = n' \circ d'$ et $f = d' + n'$. Montrons que $n = n'$ et $d = d'$.

Remarquons tout d'abord que $f \circ d' = d' \circ f$.

On en déduit, compte tenu de 6) a), que pour tout $1 \leq j \leq k$, N_j est stable par d'.

La question 6) b) implique alors que d et d' sont diagonalisables dans une même base.

Par suite $d - d'$ est diagonalisable. Or $n - n' = d' - d$.

Il en résulte que $d = d'$ et $n = n'$.

---

8) C'est la question 7) traduite en termes matriciels.

Partie III

I) a) $\ker(I_p + N) = \{x \in \mathbb{C}^p, N(x) = -x\}$.

Or, pour tout $x \in \ker(I_p + N)$, $N^p(x) = (-1)^p x = 0$.

On en déduit que $\ker(I_p + N) = \{0\}$.

Le résultat en découle.

b) Remarquons que N commute avec $\exp(D)$ et que

$$\exp(D)\left(\sum_{j=1}^{j=p-1} \frac{N^j}{j!}\right) = N \exp(D)\left(\sum_{j=1}^{j=p-1} \frac{N^{j-1}}{j!}\right).$$

On en déduit que $\exp(D)\left(\sum_{j=1}^{j=p-1} \frac{N^j}{j!}\right)$ est nilpotente.

c) On a $A = D + N$ donc $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$ car D et N commutent.

L'égalité $N^p = 0$ implique que $\exp(N) = \sum_{j=0}^{j=p-1} \frac{N^j}{j!}$.

On en déduit que

$$\exp(A)=\exp(D)\left(I_p+\sum_{j=1}^{j=p-1}\frac{N^j}{j!}\right)=\exp(D)+\exp(D)\,N\left(\sum_{j=1}^{j=p-1}\frac{N^{j-1}}{j!}\right).$$

La matrice $\exp(D)$ est diagonalisable, la matrice $\exp(D)\left(\sum_{j=1}^{j=p-1}\frac{N^j}{j!}\right)$

est nilpotente et les deux matrices commutent.

Il en résulte que $\exp(A)=\exp(D)+\exp(D)\,N\left(\sum_{j=1}^{j=p-1}\frac{N^{j-1}}{j!}\right)$ est la décomposition

de Dunford de la matrice $\exp(A)$.

d) Si A est une matrice diagonalisable alors sa matrice nilpotente N, dans la décomposition de Dunfort est nulle.

On en déduit que la matrice nilpotente $\exp(D)\,N\left(\sum_{j=1}^{j=p-1}\frac{N^{j-1}}{j!}\right)$ dans la

décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est nulle.

Par suite, $\exp(A)$ est diagonalisable.

Inversement supposons que $\exp(A)$ est diagonalisable.

La matrice nilpotente $\exp(D)\,N\left(\sum_{j=1}^{j=p-1}\frac{N^{j-1}}{j!}\right)$ dans la décomposition de Dunford

de $\exp(A)$ est alors nulle.

Or, $\exp(D)$ et $\sum_{j=1}^{j=p-1}\frac{N^{j-1}}{j!}=I_p+\sum_{j=1}^{j=p-1}\frac{N^j}{(j+1)!}$ sont inversibles d'après les questions

6) c) Partie I et 1) a) Partie III.

Il en résulte que $N=0$ et que A est une matrice diagonalisable.

e) Soit $X=D+N$.

$\exp(X)=I_p$ équivaut à $\exp(D)=I_p$ et $N\left(\sum_{j=1}^{j=p-1}\frac{N^{j-1}}{j!}\right)=0$.

Soit $D=PYP^{-1}$ où $P\in GL(p,\mathbf{C})$ et $Y=diag(\lambda_1,...,\lambda_p)$.

$\exp(D)=I_p$ si et seulement si $\lambda_j\in 2i\pi\mathbf{Z}$.

Par suite $\exp(X)=I_p$ si et seulement si X est semblable à $Y=diag(\lambda_1,...,\lambda_p)$

avec $\lambda_j\in 2i\pi\mathbf{Z}$.

---

2) a) La fonction polynomiale g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

De plus pour tout réel t, la matrice $g(t)$ est nilpotente.

On en déduit que la fonction $t \mapsto f(t) = \exp(g(t))$ est encore polynomiale donc C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout réel t, $g'(t) = \sum_{j=1}^{p-1}(-1)^{j+1}t^{j-1}N^j = N\left(\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j t^j N^j\right)$.

Il est facile de vérifier que $(I_p + tN)\left(\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j t^j N^j\right) = I_p$.

On en déduit que pour tout réel t, $g'(t) = (I_p + tN)^{-1} N$.

c) L'égalité $f(t) = \sum_{j=0}^{p} \frac{(g(t))^j}{j!}$, valable pour tout réel t, permet d'affirmer que $f'(t) = g'(t)\left(\sum_{j=0}^{p-1} \frac{(g(t))^j}{j!}\right) = g'(t)f(t)$, pour tout réel t.

d) On déduit des questions précédentes que
$(I_p + tN)\ f'(t) = Nf(t)$ pour tout réel t.
En dérivant l'égalité précédente, on obtient que
$f''(t) = 0$, pour tout réel t. Par suite la fonction f' est constante et égale à $f'(0) = N$.

On en déduit que pour tout réel t, $f(t) = I_p + tN$.

---

3) a) Soit $D = P\mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_k)\, P^{-1}$ où $P \in \mathbb{GL}(p, \mathbb{C})$.
Soit $D' = P\mathrm{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_k)\, P^{-1}$,
on a $\exp(D') = P\mathrm{diag}\,(e^{\mu_1}, ..., e^{\mu_k})\, P^{-1} = D$ car
$e^{\mu_j} = \lambda_j$, pour tout $1 \leq j \leq k$.

b) $D = P\mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_k)\, P^{-1}$ où $P \in \mathbb{GL}(p, \mathbb{C})$,
donc $L(D) = P\mathrm{diag}\,(L(\lambda_1), ..., L(\lambda_k))\, P^{-1} = P\mathrm{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_k)\, P^{-1} = D'$.

---

4) a) Soit A inversible et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford.
On a $I_p = A^{-1}D + A^{-1}N$.

Or $A^{-1}N$ est nilpotente, donc $I_p - A^{-1}N$ est inversible d'après la question 1) a) Partie III.

Par suite $A^{-1}D$ est inversible. Il en découle que D inversible.

b) D'après Partie III 2) d),

$$I_p + D^{-1}N = \exp\left(\sum_{j=1}^{p-1}(-1)^{j+1}\frac{(D^{-1}N)^j}{j}\right) = \exp\left(Q(D^{-1}N)\right),$$

où $Q(X) = \sum_{j=1}^{p-1}(-1)^{j+1}\frac{X^j}{j} \in \mathbb{C}[X]$.

c) Soit $A \in \mathbb{GL}(p, \mathbb{C})$

$A = D\exp\left(Q(D^{-1}N)\right) = \exp(D')\exp\left(Q(D^{-1}N)\right)$

où $D' = L(D)$ est un polynpôme en D

donc $A = \exp(L(D)Q(D^{-1}N))$ car D et $D^{-1}N$ commutent.

Le résultat en découle.

---

5) Soit $X \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ et $X = D + N$ sa décomposition de Dunford.

On peut écrire

$$\exp(X) = \exp(D) + \exp(D)N = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car la matrice ... I_2 et la matrice nilpotente $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent.

On en déduit que $\exp(D) = I_2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après Partie III 1) e) les solutions de l'équation $\exp(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont

$X = Pdiag(\lambda_1, ..., \lambda_p)P^{-1} + N$ avec $\lambda_j \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et $P \in \mathbb{GL}(p, \mathbb{C})$.