



Premier Problème

- A
- 1.a) $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \sigma \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sigma E_0 S = \sigma E_0 \pi a^2$ 0,5
- 1.b) $\vec{E}_0 = -\text{grad } V \Rightarrow \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{z} \vec{u}_z = -\int_A^B dV \Rightarrow V_A - V_B = E_0 L$ 1,5
 D'où $V_A - V_B = \frac{I}{\sigma \pi a^2} L = \frac{L}{\sigma \pi a^2} I = R_0 I$ avec
 $R_0 = \frac{L}{\sigma \pi a^2}$ 0,5
- 2.a) $P_w = \iint \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E_0^2$
- 2.b) $P = \iint P_w d\tau = \sigma E_0^2 \iint d\tau = \sigma E_0^2 L \pi a^2$ 0,5
 $= \frac{1}{\sigma} \left(\frac{I}{\pi a^2} \right)^2 L \pi a^2 = \frac{L}{\sigma \pi a^2} I^2 = R_0 I^2$

B.1) Un courant variable ($\vec{j} = \sigma \vec{E}(t)$) crée un champ magnétique variable (M.A), qui lui crée un champ électrique non homogène (M.F) venant à se superposer à celui du générateur. Le champ électrique dans le conducteur ne peut donc pas être uniforme en régime variable.

B.2.a) L'équation locale de la conservation de la charge s'écrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$ Dans un conducteur ohmique $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ et comme $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (M.G) l'équation de conservation de la charge dans un conducteur ohmique s'écrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho = 0$. 0,25

B.2.b) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$ avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$ $\rho(M,t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$ 0,5
 $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$: temps de relaxation 0,25
 A.N $\tau = \frac{1}{5,9 \times 10^{16}} \times 10^{-16} = 1,5 \times 10^{-19} \text{ s}$ 0,25
 $\frac{1}{\tau} \sim 10^{19} \text{ Hz}$ Dans le domaine des fréq Hertzienne

le conducteur est localement neutre.

0,5

B.2c) $\vec{J} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$; $\frac{\|\vec{J}_D\|}{\|\vec{J}_c\|} \sim \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma} = \frac{2\pi\epsilon_0 f}{\sigma}$; $\frac{\|\vec{J}_D\|}{\|\vec{J}_c\|} \ll 1 \Rightarrow$

A.N $f \ll \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} = f_c$
 $f_c = \frac{5,9 \cdot 10^7}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-9}} = 36 \cdot \pi$

$f_c = 18 \times 5,9 \times 10^{16} = 1,06 \cdot 10^{18}$ Hz

0,5

Dans le domaine des frequences Hertzienne cette condition est largement verifiee d'ou $\|\vec{J}_D\|$ est negligeable devant $\|\vec{J}_c\|$.

B.3) $\vec{J}(M,t) = \underline{j}(r) e^{-i\omega t} \vec{u}_z$

B.3a) Les equations de Maxwell s'ecrivent: $\text{div} \vec{E} = 0$ (M.G)

$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$; $\text{div} \vec{B} = 0$ (M.F)

1

B.3.b) $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$
 $= -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{B} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$

$\Rightarrow \Delta \vec{J} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$

$\Delta \vec{J} = -\mu_0 i \omega \sigma \vec{J}$

D'ou $\Delta \vec{J} + \frac{2i}{\delta^2} \vec{J} = \vec{0}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$

0,5

B.4) $\Delta \underline{j} + \frac{2i}{\delta^2} \underline{j} = 0 \Rightarrow \Delta \underline{j} + \frac{2i}{\delta^2} \underline{j} = 0$ (1)

$\underline{j} = \underline{j}(r) \vec{u}_z$

$\Delta \underline{j} = \frac{d^2 \underline{j}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{j}}{dr}$

(1) s'ecrit $\frac{d^2 \underline{j}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{j}}{dr} + \frac{2i}{\delta^2} \underline{j} = 0$

$\frac{d \underline{j}}{dr} = \frac{d \underline{j}}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d \underline{j}}{dx}$; $\frac{d^2 \underline{j}}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \underline{j}}{dx^2}$

D'où $\frac{d^2 j}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dj}{dx} + 2ij = 0$ en divisant par j (0)
 on obtient :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + 2iy = 0$$

0,5

B.5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2n(2n-1) C_{2n} x^{2n-2} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} 2n C_{2n} x^{2n-1}$$

$$= -2i \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} 4(p+1)^2 C_{2p+2} x^{2p} = -2i \sum_{p=0}^{\infty} C_{2p} x^{2p} \forall x.$$

D'où $2(p+1)^2 C_{2p+2} = -i C_{2p}$ avec $C_0 = 1$.

$$C_{2(p+1)} = \frac{-i}{2(p+1)^2} C_{2p} \Rightarrow C_{2p} = \frac{-i}{2p^2} C_{2p-2} \quad (p \geq 1)$$

$$C_{2p} = \frac{-i}{2p^2} \cdot \frac{(-i)}{2(p-1)^2} \cdot \frac{(-i)}{2 \cdot (p-2)^2} \cdots \frac{(-i)}{2 \cdot 1^2} C_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{2p} = \frac{(-i)^p}{2^p (p!)^2} C_0 = \frac{(-i)^p}{2^p (p!)^2} ; p \geq 1 \\ C_0 = 1. \end{array} \right.$$

Ainsi $y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{2^p (p!)^2} x^{2p}$

1

$$y(x) = 1 - \frac{i}{2} x^2 - \frac{x^4}{16}$$

0,25

$$|y(x)|^2 = \left(1 - \frac{x^4}{16}\right)^2 + \frac{x^4}{4}$$

$$= 1 + \frac{x^8}{(16)^2} - \frac{x^4}{16} \times 2 + \frac{x^4}{4} \text{ en s'arrêtant}$$

à l'ordre 4 :

$$|y(x)|^2 = 1 + \frac{x^4}{8} \Rightarrow y(x) = \left(1 + \frac{x^4}{8}\right)^{1/2}$$

0,25

B.6)

$$\alpha_1 = 0,054$$

$$\alpha_2 = 10,8$$

$$\gamma(\alpha_1) = \left(1 + \frac{\alpha_1^4}{8}\right)^{1/2} \approx 1$$

$$\gamma(\alpha_2) = 4,985.$$

0,25

0,25

0,25

• Pour $v = v_1$ l'effet de peau ne se ressent pas puisque $|\underline{j}(\alpha_1)| \approx |\underline{j}(0)|$: la valeur du courant sur la périphérie est égale à celle sur l'axe du cylindre. En revanche pour $v = v_2$ l'effet de peau est considérable puisque le courant sur la périphérie est environ cinq fois la valeur sur l'axe.

1

• L'effet de peau reste négligeable tant que le rayon du fil reste inférieur à l'épaisseur de peau : En effet pour $\alpha_1 = \frac{a}{\delta_1} = 0,054 \ll 1$ on a $|\underline{j}(\alpha_1)| \approx |\underline{j}(0)|$ alors que pour $\alpha_2 = \frac{a}{\delta_2} = 10,8 > 1$ on a $|\underline{j}(\alpha_2)| \approx 5|\underline{j}(0)|$.

0,25

B.7)

$$f(\alpha_1) = 1 + \frac{(0,054)^4}{48} \approx 1$$

$$f(\alpha_2) = 5,65.$$

Dans le premier cas la résistance en régime variable est similaire à celle obtenue en régime continue. Cette augmentation nette de la résistance (pour $v = v_2$) s'explique par la localisation du courant dans le voisinage immédiat de la surface du conducteur (question B.6).

1

I.2.a) Le miroir de Lloyd est équivalent aux trous d'Young
 S joue à la fois le rôle d'une source primaire
 et d'une source secondaire

$$SS' = 2h$$

La différence de marche géométrique des deux
 rayons se superposant en P est $\delta_{geo} = \frac{SS'x}{D}$
 avec $D =$ distance de l'écran au plan contenant
 les deux sources SS' .

$$D = l + d.$$

Le rayon réfléchi subit un déphasage de π
 par rapport à celui incident et donc à la
 différence de marche géométrique il faudrait
 rajouter $\frac{\lambda_0}{2}$ correspondant à ce déphasage supplé-
 mentaire de π ($\pi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{2}$)

$$\delta = \delta_{geo} + \frac{\lambda_0}{2} = \frac{2hx}{l+d} + \frac{\lambda_0}{2}$$

Comme l'intensité de l'onde réfléchie est égale
 à celle incidente $I_1 = I_2 = I_0$ on obtient:

$$I(P) = 2I_{01} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{2hx}{l+d} + \frac{\lambda_0}{2} \right) \right) \right)$$

I.2.b) La frange rectiligne en $x=0$ est +q $I=0 \Rightarrow$
 Elle est sombre.

I.2.c) L'interfrange est la période spatiale de
 l'intensité

$$\frac{2\pi x}{i} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{2h}{l+d} x \Rightarrow$$

$$i = \frac{\lambda_0(l+d)}{2h} = 0,25 \text{ mm}$$

1,5

0,5

0,5

2.d)

La position de l'image O_{im} de θ est tq

$$\frac{1}{O_1 O_{im}} - \frac{1}{O_1 O} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{O_1 O_{im}} = \frac{f' \overline{O_1 O}}{f' + O_1 O}$$

AN $\overline{O_1 O_{im}} = \frac{-10 \times 12}{-12 + 10} = 60 \text{ cm.}$

$$\frac{O_1 O_{im}}{O_1 O} = \frac{i_{im}}{i} = \frac{60}{12} = 5$$

D'où $h = \frac{b(l+d)}{2 i_{im}} \frac{O_1 O_{im}}{O_1 O} \Rightarrow \text{AN } h = 0,3 \text{ mm}$

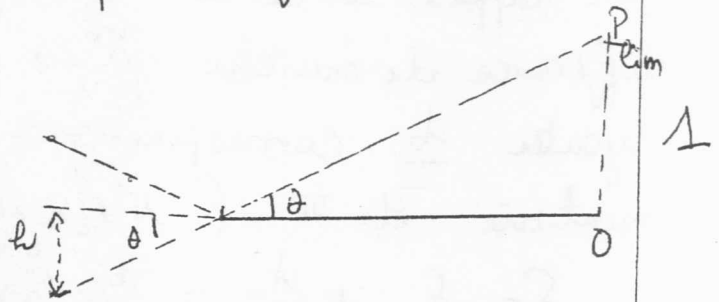
2.e) * $\text{tg } \theta = \frac{h}{d} = \frac{OP_{lim}}{l} \Rightarrow OP_{lim} = l \frac{h}{d}$
 $OP_{lim} = \text{largeur du champ d'interférence}$

Le nombre de franges
Sombres est

$$N_s = E \left(\frac{OP_{lim}}{i} \right) + 1$$

$$= E(28,8) + 1$$

$$= 29.$$



II.1)

La différence de marche reste inchangée \Rightarrow
la figure d'interférence reste donc inchangée.

II.2)

Les sources S_1, S_2 et S sont incohérentes leurs intensités s'ajoutent. D'autre part on a :

$$I_1(P) = I_2(P) = I(P) \text{ Ainsi}$$

$$I_{tot} = 3(I(P)) \text{ où } I(P) \text{ représente}$$

l'intensité au point P résultant du phénomène d'interférence produit par S . Les franges sont trois fois plus brillante qu'avec S seule.

II.3) Chaque élément dx centré sur x produit

$$dI = \frac{2I_0}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta_{\text{geo}}(P) \right) dx$$

$$\delta_{\text{geo}}(P) = \frac{2(h+x)x}{l+d}$$

$$\text{D'où } dI(P) = \frac{2I_0}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{2(h+x)x}{l+d} \right) \right) dx$$

où x désigne l'abscisse de S par rapport au centre de la fente.

II.3.4)

On pose $\beta = h+x \Rightarrow d\beta = dx$.

D'où

$$I(P) = \frac{2I_0}{a} \int_{h-a/2}^{h+a/2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{2\beta x}{l+d} \right) \right) d\beta$$

$dI(P)$ représente l'intensité produite en P par l'élément dx . Les différentes sources élémentaires constituant la fente sont incohérentes entre elles donc l'intensité résultante en P est la somme des intensités ce qui justifie la sommation précédente.

$$I(P) = 2I_0 \left(1 - \frac{2I_0}{a} \frac{\lambda_0(l+d)}{4\pi} \left[\sin \frac{4\pi\beta x}{\lambda_0(l+d)} \right]_{h-a/2}^{h+a/2} \right)$$

$$= 2I_0 \left(1 - \frac{\lambda_0(l+d)}{2\pi a x} \left[\sin \left(\frac{4\pi x}{\lambda_0(l+d)} (h+a/2) \right) + \frac{\lambda_0(l+d)}{2\pi a x} \sin \left(\frac{4\pi x}{\lambda_0(l+d)} (h-a/2) \right) \right] \right)$$

$$I(P) = 2I_0 \left(1 - \text{sinc} \left(\frac{2\pi a x}{\lambda_0(l+d)} \right) \cos \left(\frac{2\pi x}{\lambda_0} \right) \right)$$

$$I(I) = 2I_0 \left(1 - \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0(l+d)}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right) \right)$$

$$i = \frac{\lambda_0(l+d)}{2h}$$

1,5

Allure + Comment 0,5+0,5

II 3b)

$$C = \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0(l+d)}\right) \right|$$

Les franges sont brouillées quand $C = 0$

0,5

c'est à dire quand $\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{l+d} = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^*$

cad pour $x = \frac{\lambda_0(l+d)}{2a} (n\pi)$

Elles disparaissent pour la première fois pour $x = \frac{\lambda_0(l+d)}{2a}$ réapparaissent ensuite mais faiblement contrastées disparaissent de nouveau pour $x = \frac{\lambda_0(l+d)}{a}$, etc....

III.

III.1)

$\forall \lambda$ on a en $x=0$ $\delta = \frac{\lambda_0}{2} \Rightarrow$ noir: "frange" noire
 pour x proche de zéro on a irrésolution des franges d'interférences. Plus loin il y a brouillage de la figure d'interférence résultant de la superposition des interférences produites par chaque radiation de longueur d'onde λ_i c'est le blanc d'ordre supérieur.

0,5

III 2a)

Il manque certaines longueurs d'onde dans le spectre analysé en $x \rightarrow$ Spectre cannelé.

0,5

II.2b) Une radiation de longueur d'onde λ_i éteinte correspond à des interférences destructives et donc $\bar{\delta} = \frac{2h x_0}{l+d} + \frac{\lambda_i}{2} = (2k+1) \frac{\lambda_i}{2}$; k entier

$\Rightarrow \frac{hx_0}{l+d} = k \frac{\lambda_i}{2} \Rightarrow 0,4 \mu\text{m} \leq \lambda_i \leq 0,7 \mu\text{m}$

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} \leq \frac{2hx_0}{(l+d)k} \leq \frac{1}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_2} \leq \frac{(l+d)k}{2hx_0} \leq \frac{1}{\lambda_1}$

$\Rightarrow \frac{2hx_0}{\lambda_2(l+d)} \leq k \leq \frac{2hx_0}{\lambda_1(l+d)}$ pour $x_0 = 1,5 \text{ mm} \rightarrow 5,14 \leq k \leq 9$
 pour $x_0 = 3 \text{ mm} \rightarrow 10,28 \leq k \leq 18$

Pour $x_0 = 1,5 \text{ mm}$ on a 4 radiations éteintes

Pour $x_0 = 3 \text{ mm}$ on a 8 " " "

Plus x_0 est grand plus le nombre de cannelure augmente.

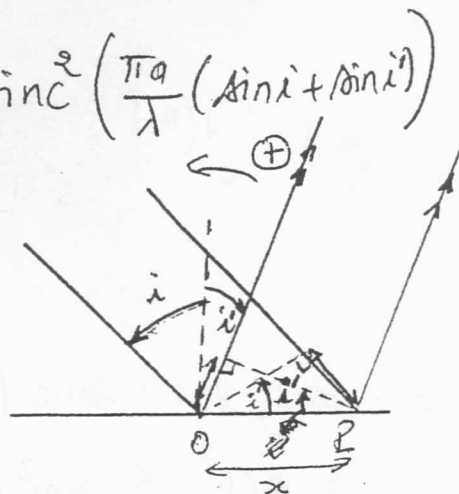
0,5
0,5
0,5

B.1) $\underline{A} = \alpha \underline{s}_0 l \int_{-a/2}^{a/2} e^{-\frac{2\pi x}{\lambda} j (\sin i' + \sin i)} dx$

$\underline{A} = \alpha \underline{s}_0 l a \text{sinc} \left(\frac{\pi a}{\lambda} (\sin i + \sin i') \right)$

$\begin{cases} I = A A^* = \alpha |\underline{s}_0|^2 (la)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} (\sin i + \sin i') \right) \\ I_0 = \alpha |\underline{s}_0|^2 (la)^2 \end{cases}$

$(\vec{k}_d - \vec{k}) \cdot \vec{OP} = -x (\sin i' + \sin i)$



1,5

I.2)

$i'_{\max} = -i \Rightarrow$ Direction donnée par l'optique géométrique (Loi de Descartes de la réflexion)

0,5
0,5

max secondaires $\text{tg } \frac{d}{\lambda} \sin^2 v = 0 \Rightarrow v = \text{tg } v$
 $\Rightarrow v \approx (2k+1) \frac{\pi}{2}$ avec $v \neq 0$ et $v \neq -1$

1^{er} max secondaire $v \approx \frac{3\pi}{2} \Rightarrow I = 0,045 I_0$

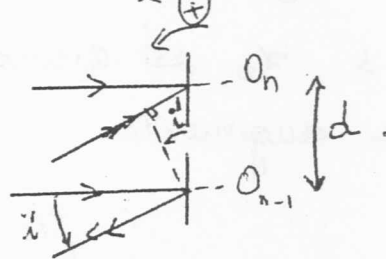
2^{eme} max secondaire $v \approx \frac{5\pi}{2} \Rightarrow I = 0,016 I_0$

0,5
0,5

II.1.a)

On désigne par φ le déphasage entre deux points distants de d , appartenant à deux miroirs successifs $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d (\sin i' - \sin i)$

$$\underline{A} = A_1^{\text{diff}} \left[1 + e^{j\varphi} + \dots + e^{j(N-1)\varphi} \right]$$



$$\underline{A} = \sum_{p=1}^N A_1^{\text{diff}} e^{j(p-1)\varphi}$$

$$= A_1^{\text{diff}} \frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}}$$

où A_1^{diff} est l'amplitude complexe diffractée par le 1^{er} miroir. (Origine des phases prise au niv. du 1^{er} miroir)

1,5

$$= A_1^{\text{diff}} e^{j\frac{(N-1)\varphi}{2}} \left(\frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)$$

$$\underline{A} = \alpha \underline{s}_0 l a \text{sinc} \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin i' \right) e^{j\frac{(N-1)\varphi}{2}} \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

II.1.b)

$$I = \alpha^2 |\underline{s}_0|^2 (la)^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin i' \right) \left(\frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2$$

$$= I_0 N^2 \text{sinc}^2 (\pi a u) \left(\frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{N \sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2$$

$$= I_{0R} \text{sinc}^2 (\pi a u) \left(\frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{N \sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2$$

D'où $I_R = I_{0R} \text{sinc}^2(\pi a u) \left(\frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{N \sin \frac{\varphi}{2}} \right)$; $\varphi = 2\pi d \cdot u$

$u = \frac{\sin i'}{\lambda}$; $I_{0R} = N^2 I_0$

II.1.c)

$\varphi = 2q\pi \Rightarrow d \sin i' = q \lambda_0$

II.1.d)

$d\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d \cos i' di' = \frac{2\pi}{\lambda}$

Ainsi $\Delta i' = \frac{\lambda_0}{N d \cos i'} = \frac{\lambda_0}{L \cos i'}$

II.2.a)

ona $d \sin i'_q = q \lambda$ (1)

la différentiation de (1) à q fixe donne

$d \cos i'_q di'_q = q d\lambda$

$\rightarrow \Delta i'_q = \frac{q \Delta \lambda}{d \cos i'_q}$

II.2.b)

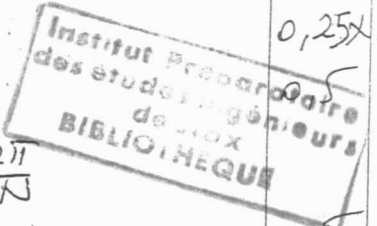
A la limite de résolution $\Delta i'_q = \Delta i'$

$\Rightarrow \Delta \lambda_{\min} = \frac{\lambda d}{N d q} = \frac{\lambda}{N q}$

Pour $q = 1$ $\Delta \lambda_{\min} = 577 \times 10^{-3} \text{ nm}$

or $\Delta \lambda = 2,1 \text{ nm} > \Delta \lambda_{\min} \Rightarrow$ Les longueurs

d'ondes du doublet de Mercure sont séparées à l'ordre 1.



0,5
0,25x2
0,5

0,5

1