



Concours Mathématiques et Physique et Physique et Chimie
Epreuve de Sciences et Techniques de l'Ingénieur

Date : Vendredi 9 Juin 2006 Heure : 8 H Durée : 3 H Nbre pages : 13

Barème : A : Conception (4 pts) Partie B : Mécanique (10 pts) Partie C : Automatique (6 pts)

Remarques :

- 1/ Les parties A, B et C sont indépendantes.
- 2/ Les documents réponses DR1 (Conception), DR2 (Mécanique) et DR3 (Automatique) sont à rendre en totalité, même vides, en fin de l'épreuve.
- 3/ L'usage d'une calculatrice programmable est interdit.
- 4/ Il est demandé aux étudiants de mentionner les principaux passages de leurs raisonnements et les résultats obtenus dans les espaces qui leurs sont réservés dans les Documents Réponses.

UNITE DE TRAITEMENT DE SURFACE

Présentation

La plupart des traitements de surface ont pour objet d'améliorer la tenue des pièces à diverses corrosions en les recouvrant d'un revêtement métallique ou de produits non métalliques isolant la pièce du milieu ambiant.

Les traitements de surface décoratifs sont une partie très importante du domaine des traitements de surface. Ils offrent une valeur ajoutée importante à des nombreux produits de consommations courantes tels que les accessoires de décoration, l'horlogerie, la lustrerie, l'électroménager, le cosmétique, etc....

Le domaine des traitements de surface décoratifs est très large et permet de donner à la surface :

- un aspect de couleur ;
- un aspect métallique ;
- un effet de surface particulier.

Le système, objet de cette étude, est une unité de traitement de surface décoratif pour bouchons de produits cosmétiques (parfum, shampooing, crème,...). Ce traitement consiste à apporter aux bouchons un aspect de couleur caractérisé par une brillance intense qui ne ternit pas. (figure-1).

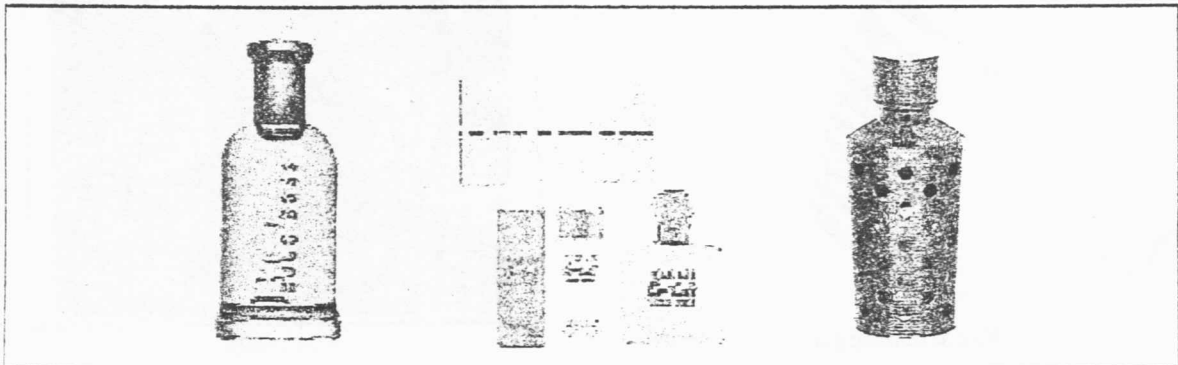


Figure-1 : Bouchons pour flacon de parfum

Description fonctionnelle de l'unité de traitement de surface décoratif :

L'unité de traitement de surface (figure-2) est principalement constituée de :

- plusieurs bacs de traitement ou de rinçage. Ils sont disposés radialement autour d'une console fixe.
- une console fixée au sol, renferme le groupe de motorisation et supporte le manipulateur ;
- un manipulateur mobile destiné à transférer les bouchons à traiter d'un bac à un autre.

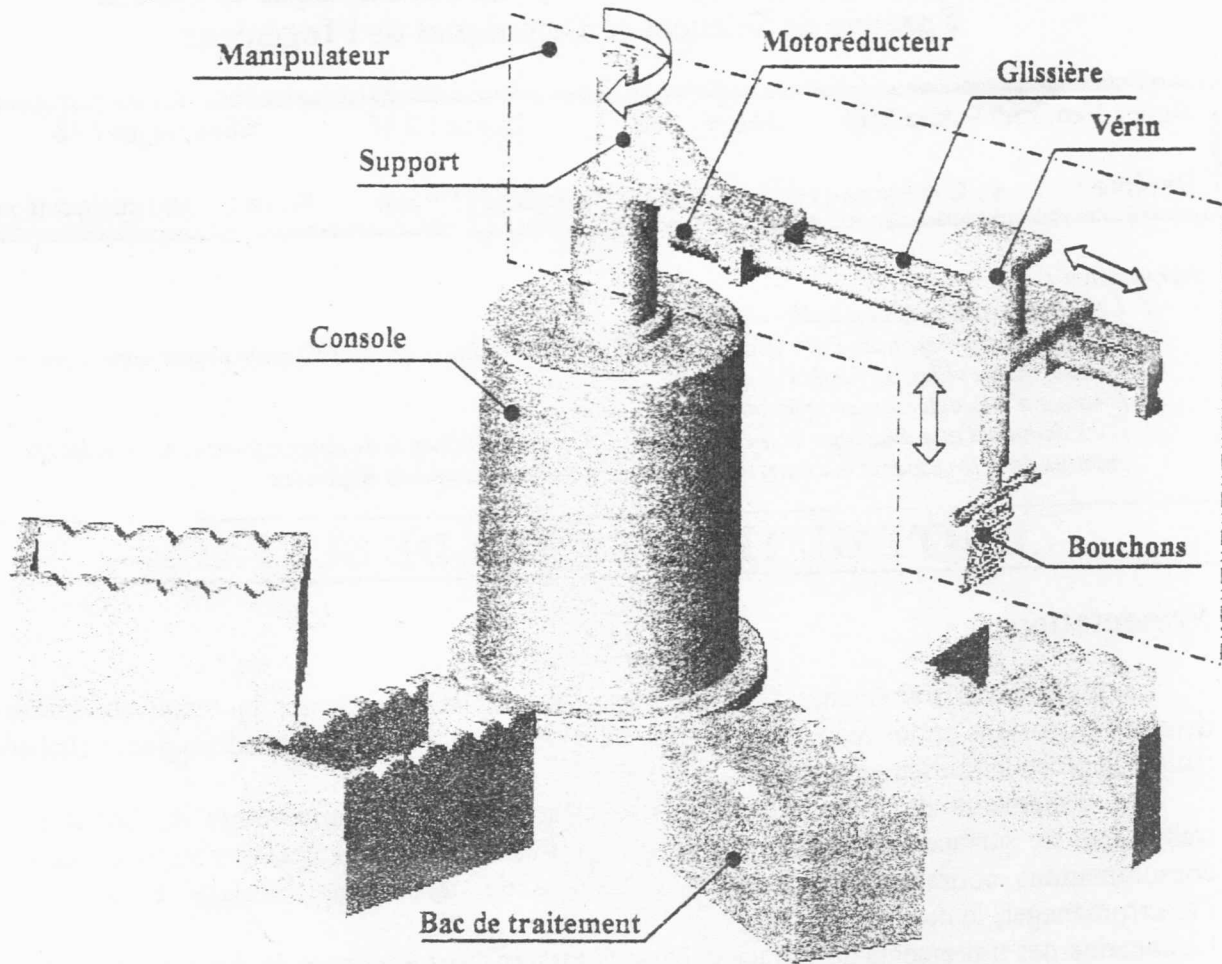
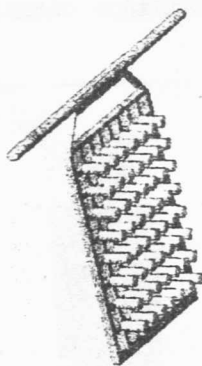
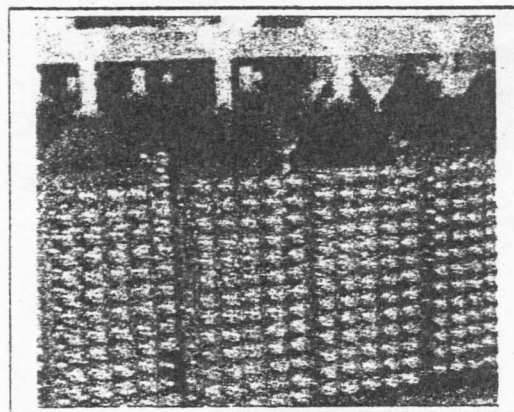


Figure-2 : Schéma de l'unité de traitement de surface

Les bouchons à traiter, préalablement dégraissés, sont fixés sur une balancelle par l'opérateur. L'ensemble (bouchons, balancelle) constitue une grappe (figure-3).



Vue schématique



Vue réelle

Figure-3 : Schéma d'une grappe

L'opérateur dispose, suivant un ordre déterminé, les grappes sur le convoyeur d'entrée CE (Tapis roulant). En fonction de la disponibilité des bacs, le manipulateur viendra chercher la grappe située au poste d'entrée PE. La grappe sera ensuite transférée d'un bac à un autre suivant une procédure établie lors de la saisie des paramètres de traitement (temps d'immersion, intensité...)

Le traitement de la grappe étant terminé, le manipulateur la pose au poste de sortie PS sur le convoyeur de sortie CS. (figure-4)

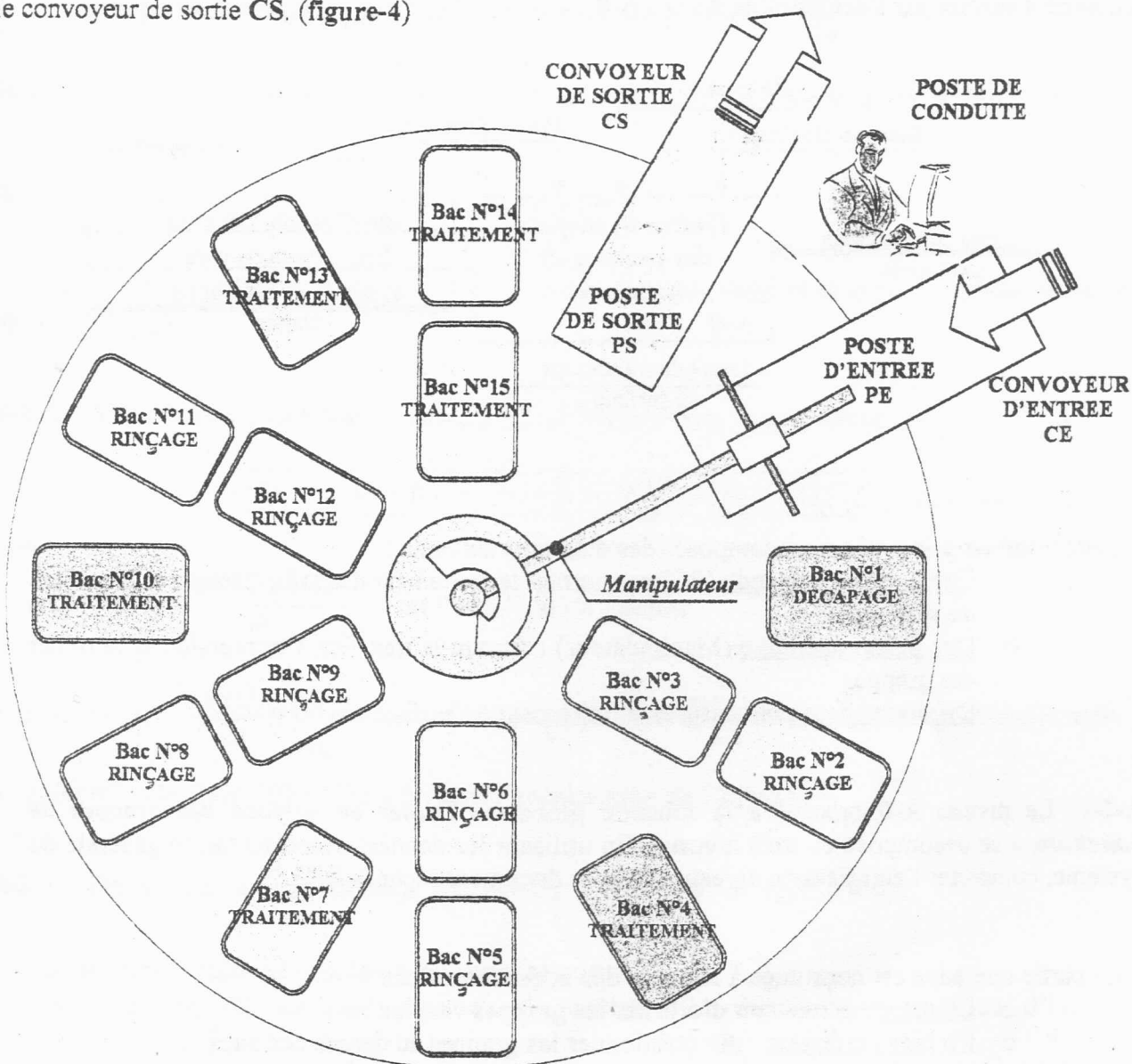


Figure-4 : Disposition générale de l'unité de traitement

Description fonctionnelle de la partie opérative : Manipulateur

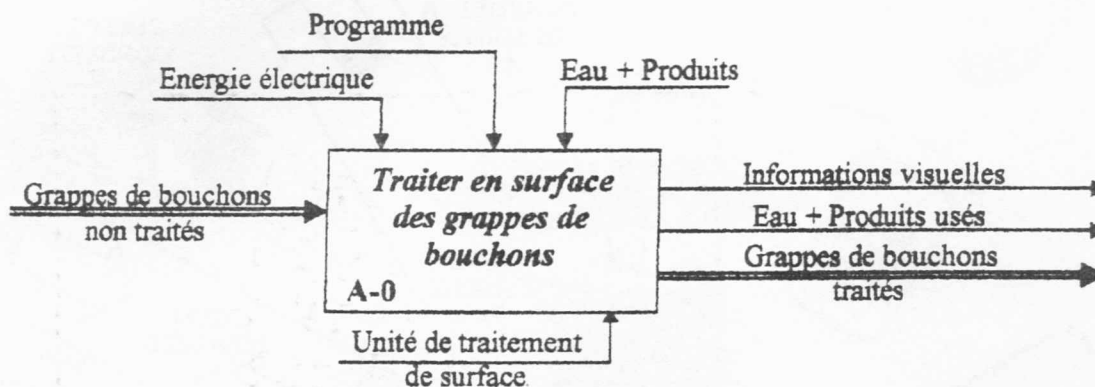
Le manipulateur est composé d'un ensemble d'organes qui contribuent à transférer la grappe d'un poste à un autre et l'immersion dans différents bacs contenant des bains de traitement ou de rinçage. Trois mouvements sont attribués au manipulateur pour assurer ces fonctions :

- Une rotation autour de l'axe vertical assurée par un motoréducteur placé à l'intérieur de la console fixe. Ce mouvement permet de transférer successivement la grappe d'un bac à un autre.
- Une translation horizontale obtenue par un motoréducteur électrique et un système vis-écrou. Cette mobilité est réservée à placer la grappe dans la position d'immersion.
- Une translation verticale générée par un vérin à double effet. Ce mouvement assure l'immersion de la grappe dans le bain de traitement ou de rinçage puis son retrait.

PARTIE A : TECHNOLOGIE DE CONCEPTION

A-I- Analyse fonctionnelle du système

La description fonctionnelle générale de l'unité de traitement de surface est ébauchée sur le document suivant par l'actigramme niveau A-0.



* Cette unité est principalement composée des éléments suivants :

- Une partie commande (PC) permettant le traitement des informations et la gestion du système.
- Une partie opérative (Manipulateur) assurant le transfert, l'immersion et le retrait des grappes.
- Différents bacs pour assurer le traitement en surface des bouchons.

A-I-1- Le niveau A-0 relative à la fonction globale « *Traiter en surface des grappes de bouchons* » se décompose en trois niveaux. En utilisant les données de présentation générale du système, compléter l'actigramme niveau A0 sur le document réponse DR1.

* La partie opérative est constituée à son tour des organes suivants :

- Un rotor : permettant d'orienter les grappes vers les bacs.
- Un bras coulissant pour positionner les grappes au dessus des bacs.
- Un vérin permettant l'immersion et le retrait des grappes.

* Le bras coulissant est composé de :

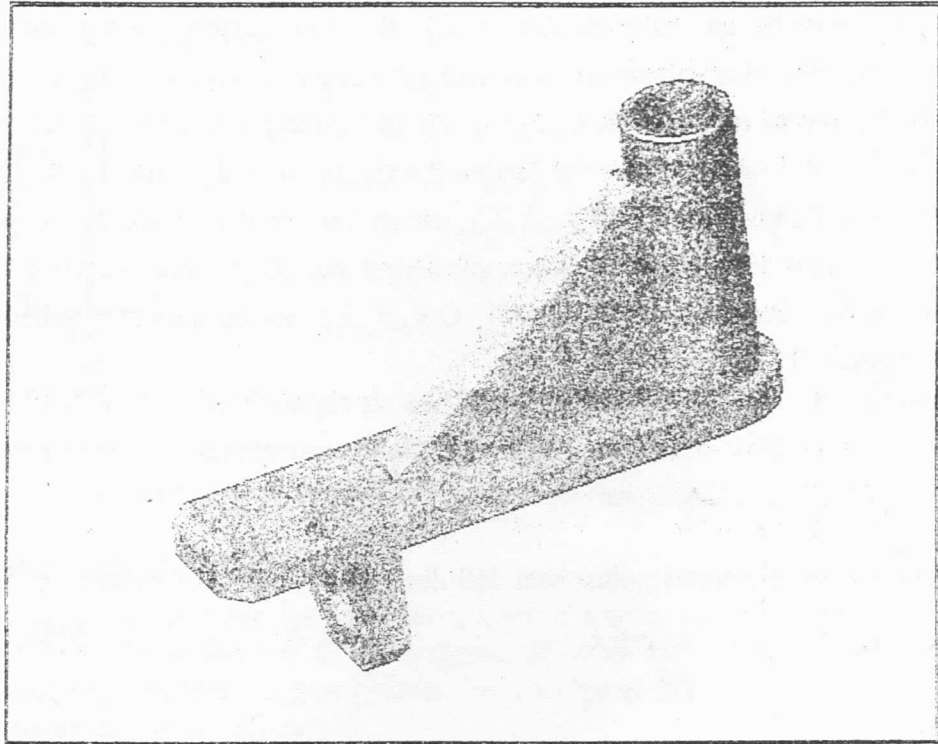
- Un moteur électrique à courant continu
- Un réducteur de vitesse.
- Un système vis-écrou

A-I-2- Compléter l'actigramme niveau A22 sur le document réponse DR1.

A-II- Etude graphique :

On donne le dessin en perspective du support porte glissière. Compléter le dessin de définition de cette pièce sur le document réponse **DR1** par :

- la vue de face en coupe brisée à plan parallèle **A-A**
- la vue de dessous;
- la vue de droite en coupe **B-B** ;
- la section sortie **C-C**.



A-III- Etude de conception : Montage de la liaison encastrement

On se propose dans cette partie de représenter la solution technologique de la liaison encastrement entre le support et la glissière. La solution retenue consiste à utiliser 4 vis d'assemblage. Ces vis sont logées dans des trous lamés usinés dans le support d'une part et implantées dans des trous taraudés débouchant réalisés sur la glissière d'autre part.

Sur le document réponse **DR1**, on vous demande de :

- Choisir parmi les 3 variétés des vis proposées celui qui convient avec les pièces à assembler en cochant la case correspondante.
- Dessiner les vis en place et terminer la représentation des trous taraudés.
- Hachurer les deux pièces.

PARTIE B : ETUDE MECANIQUE

L'étude portera sur le manipulateur de l'unité de traitement de surface décoratif des bouchons décrit précédemment par la figure-2. La figure-B.2 représente le schéma cinématique de ce mécanisme constitué principalement des éléments suivants :

- La console (0) est liée au repère $\mathcal{R}_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ supposé galiléen (absolu).
- L'arbre (1) est lié au repère $\mathcal{R}_1(H, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$. Il est en liaison pivot d'axe (O, \bar{x}_0) avec la console (0). Son mouvement est paramétré par l'angle $\alpha = (\bar{y}_0, \bar{y}_1) = (\bar{z}_0, \bar{z}_1)$ (fig-B.1.a).
- La vis (2), liée au repère $\mathcal{R}_2(K, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$, est en liaison pivot d'axe (A, \bar{y}_1) avec l'arbre (1). Son mouvement est paramétré par l'angle $\beta = (\bar{x}_0, \bar{x}_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ (fig-B.1.b).
- L'écrou (3), lié au repère $\mathcal{R}_3(B, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$, est en liaison hélicoïdale de pas p_1 d'axe (B, \bar{y}_1) avec la vis (2) d'une part, et en liaison glissière d'axe (C, \bar{y}_1) avec l'arbre (1) d'autre part.
- Le piston du vérin (4), lié au repère $\mathcal{R}_4(Q, \bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)$, est en liaison glissière d'axe (D, \bar{x}_0) avec l'écrou (3).
- La grappe (5), de centre d'inertie G , est liée au repère $\mathcal{R}_5(E, \bar{x}_5, \bar{y}_5, \bar{z}_5)$. Elle est en liaison pivot d'axe (E, \bar{z}_1) avec le piston (4). Son mouvement est paramétré par l'angle $\theta = (\bar{x}_0, \bar{x}_5) = (\bar{y}_1, \bar{y}_5)$ (fig-B.1.c).

Les positions des différents points sont définies par les vecteurs suivants :

$$\begin{array}{llll} \overline{OH} = a_0 \bar{x}_0 & \overline{AO} = a_1 \bar{x}_0 & \overline{AD} = y \bar{y}_1 & \overline{BD} = b_2 \bar{y}_1 \\ \overline{KA} = b_0 \bar{y}_1 & \overline{DE} = x \bar{x}_0 & \overline{EG} = h \bar{x}_5 & \overline{AC} = b_1 \bar{y}_1 \end{array}$$

- Où :
- α , β et θ sont les paramètres angulaires du mécanisme.
 - h , a_0 , a_1 , b_0 , b_1 et b_2 sont des constantes géométriques du mécanisme.
 - x et y sont des paramètres variables en fonction du temps.

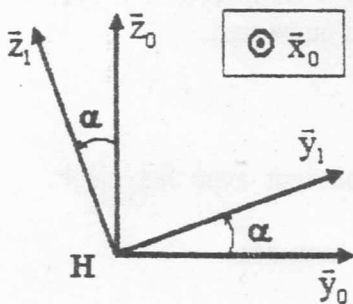


Figure-B.1.a : Mouvement de (1) par rapport à (0).

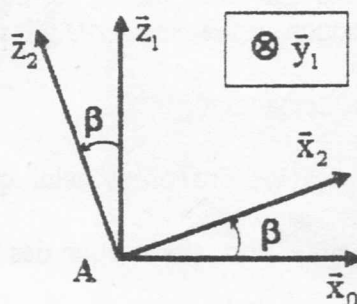


Figure-B.1.b : Mouvement de (2) par rapport à (1).

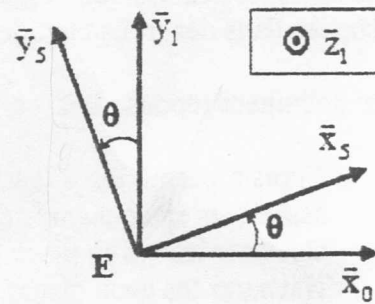


Figure-B.1.c : Mouvement de (5) par rapport à (1).

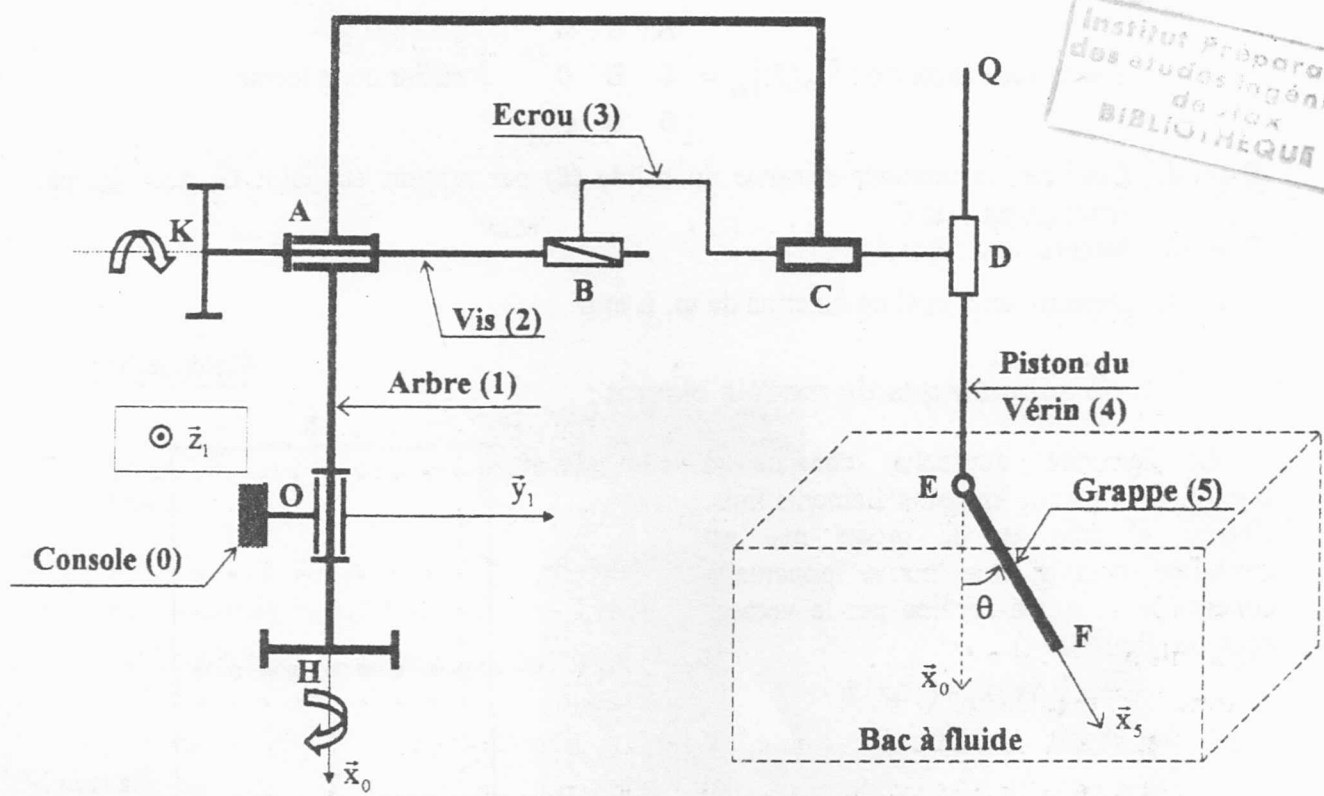


Figure-B.2 : Schéma cinématique du mécanisme.

B-1- GEOMETRIE DES MASSES

On se propose de déterminer les caractéristiques d'inertie de la grappe (5). Elle est constituée d'une balancelle de hauteur $2h$, de longueur $2L$ et de masse négligeable. Cette pièce est percée de trous équidistants où sont placés les bouchons à traiter. Ces bouchons sont identiques et de masse m_0 chacun (figure-3).

B-1-1. Etude géométrique du modèle continu :

La première approche consiste à supposer que la grappe (5) est une plaque rectangulaire homogène, de centre de gravité G , de masse totale m , de hauteur $2h$ et de longueur $2L$ (fig-B.3).

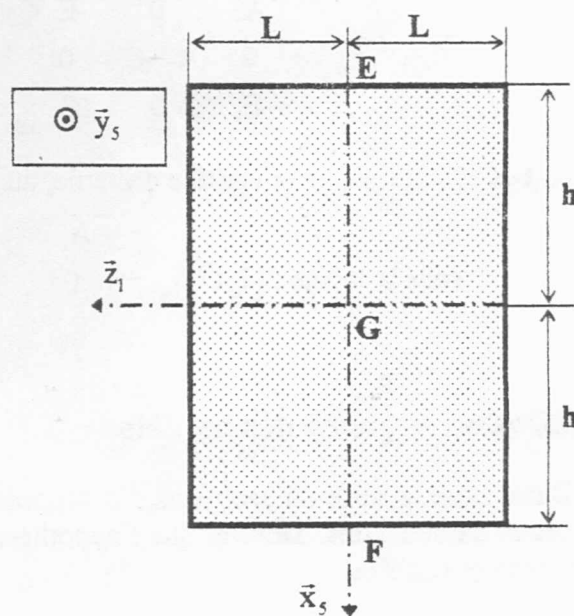


Figure-B.3 : Plaque rectangulaire homogène dans le plan $(E, \bar{x}_5, \bar{z}_1)$.

B-1-1-1. La matrice d'inertie du solide (5), au point G, exprimée dans la base $\mathcal{B}_5(\bar{x}_5, \bar{y}_5, \bar{z}_5)$

$$\text{s'écrit sous la forme : } [I_G(5)]_{\mathcal{B}_5} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_5} \quad \text{Justifier cette forme.}$$

B-1-1-2. Exprimer le moment d'inertie du solide (5) par rapport au point G, noté I_G , en fonction de A et C.

B-1-1-3. Montrer que : $B = A + C$.

B-1-1-4. Déterminer A et C en fonction de m, L et h.

B-1-2. Etude géométrique du modèle discret :

La seconde approche consiste à discrétiser la plaque en petits éléments finis. Chaque élément P, de masse m_0 , est considéré comme une masse ponctuelle concentrée au nœud repérée par le vecteur position (figure-B.4) :

$$\overrightarrow{GP} = (i\Delta x)\bar{x}_5 + (j\Delta z)\bar{z}_5$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} -n \leq i \leq n, & n \geq 2 \\ -k \leq j \leq k, & k \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = (k+1)\Delta z \\ h = (n+1)\Delta x \end{cases}$$

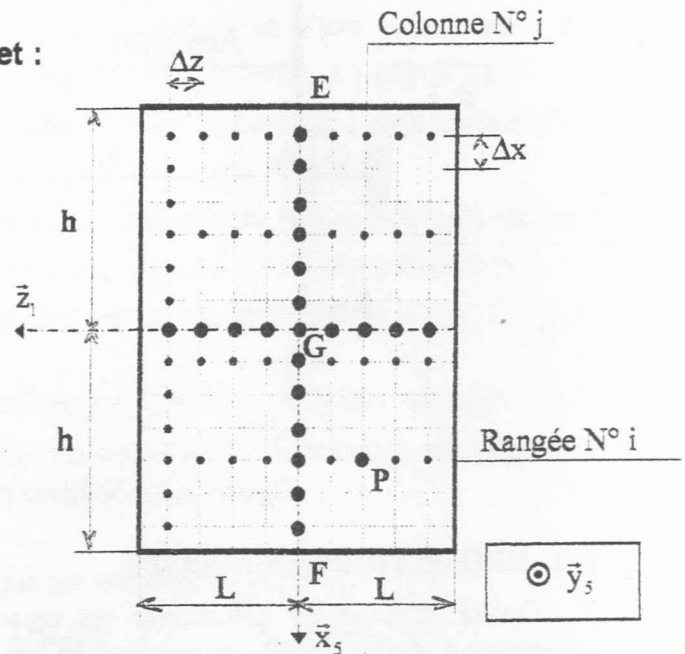


Figure-B.4 : Plaque rectangulaire discrétisée en éléments finis.

B-1-2-1. Déterminer la masse totale m de la grappe (5) en fonction de m_0 , n et k.

B-1-2-2. Montrer que la matrice d'inertie de l'élément P, au point G, dans la base \mathcal{B}_5 , s'écrit :

$$[I_G(P)]_{\mathcal{B}_5} = \begin{bmatrix} A_j & 0 & -E_{ij} \\ 0 & A_j + C_i & 0 \\ -E_{ij} & 0 & C_i \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_5} \quad \text{Calculer } A_j, C_i \text{ et } E_{ij}.$$

B-1-2-3. Montrer que la matrice d'inertie, au point G, dans la base \mathcal{B}_5 de la grappe (5) s'écrit

$$\text{sous la forme : } [I_G(5)]_{\mathcal{B}_5} = \begin{bmatrix} A_k & 0 & -E_{kn} \\ 0 & A_k + C_n & 0 \\ -E_{kn} & 0 & C_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_5} \quad \text{où : } \begin{cases} A_k = A f(k) \\ C_n = C f(n) \end{cases}$$

B-1-3. Convergence des modèles :

Dans toute la suite du problème, on suppose qu'on place sur la balancette un nombre assez important de bouchons. Montrer que l'hypothèse qui consisterait à adopter le modèle continu est parfaitement justifiée.

$$\text{On donne : } \sum_{i=-n}^n a = (2n+1)a; \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=-n}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \quad \text{et} \quad \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-k}^k ij = 0.$$

B-2- ETUDE CINEMATIQUE

B-2-1. Tracer le graphe des liaisons en identifiant les liaisons entre les différents solides.

B-2-2. Déterminer les vecteurs rotations : $\vec{\Omega}(1/0)$, $\vec{\Omega}(2/1)$, $\vec{\Omega}(3/1)$, $\vec{\Omega}(5/1)$ et $\vec{\Omega}(3/2)$.

B-2-3. Ecrire le torseur cinématique, au point B, de l'écrou (3) dans son mouvement par rapport à la vis (2) : $\left\{ \mathcal{V}(3/2) \right\}_B$ en fonction de $\dot{\beta}$ et de $p = \frac{P_1}{2\pi}$.

B-2-4. Calculer, par dérivation directe, la vitesse $\vec{V}(B \in 3/2)$ en fonction de \dot{y} . En déduire \dot{y} en fonction de $\dot{\beta}$ et de p .

B-2-5. Calculer les vitesses $\vec{V}(G \in 1/0)$ et $\vec{V}(G \in 5/1)$.

Sachant que le repère $\mathcal{R}_1(H, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est en rotation par rapport au repère supposé galiléen $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

B-2-6. Montrer que l'accélération absolue $\vec{\gamma}(G \in 5/0)$, s'écrit sous la forme :

$$\vec{\gamma}(G \in 5/0) = \vec{\gamma}(G \in 5/1) + \vec{\gamma}_e(G \in 1/0) + \vec{\gamma}_c(G \in 1/0)$$

Où :

• $\vec{\gamma}(G \in 5/1) = \left(\frac{d\vec{V}(G \in 5/1)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_1}$ est l'accélération relative.

• $\vec{\gamma}_e(G \in 1/0) = \left[\frac{d\vec{\Omega}(1/0)}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_0} \wedge \overline{HG} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge [\vec{\Omega}(1/0) \wedge \overline{HG}]$ est l'accélération d'entraînement.

• $\vec{\gamma}_c(G \in 1/0) = 2\vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{V}(G \in 5/1)$ est l'accélération de Coriolis.

B-2-7. Déterminer les accélérations $\vec{\gamma}(G \in 5/1)$, $\vec{\gamma}_e(G \in 1/0)$ et $\vec{\gamma}_c(G \in 1/0)$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que :

• La grappe (5) est de masse m , de centre d'inertie G et de matrice d'inertie

$$[I_G(5)]_{\mathcal{B}_5} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_5}$$

• Tous les autres solides sont de masses négligeables.

B-3- ETUDE CINÉTIQUE

B-3-1. Déterminer le torseur cinétique, au point G , du solide (5) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_1 : $\left\{ \mathcal{C}(5/1) \right\}_G$.

B-3-2. Déterminer le torseur dynamique, au point G , du solide (5) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_1 : $\left\{ \mathcal{D}(5/1) \right\}_G$ et l'exprimer dans la base \mathcal{B}_5 .

B-3-3. Calculer l'énergie cinétique du solide (5) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_1 : $E_C(5/1)$.

B-3-4. Exprimer dans la base \mathcal{B}_5 le vecteur \vec{U} défini par : $\vec{U} = [I_G(5)]_{\mathcal{B}_5} \vec{\Omega}(1/0) - I_G \vec{\Omega}(1/0)$.

Où : $I_G = A + C$ et $[I_G(5)]_{\mathcal{B}_5}$ est la matrice d'inertie du solide (5).

B-3-5. On démontre que le torseur des effets d'inertie d'entraînement $\left\{ \mathcal{D}_{ie}(5, \mathcal{R}_1/0) \right\}_G$ et le torseur des effets d'inertie de Coriolis $\left\{ \mathcal{D}_{ic}(5, \mathcal{R}_1/0) \right\}_G$, de la grappe (5) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_1 , s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \mathcal{D}_{ie}(5, \mathcal{R}_1/0) \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} -m \vec{\gamma}_e(G \in 1/0) \\ -\vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{U} - [I_G(5)] \left[\frac{d\vec{\Omega}(1/0)}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_0} \end{array} \right\}_G$$

$$\left\{ \mathcal{D}_{ic}(5, \mathcal{R}_1/0) \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} -m \vec{\gamma}_c(G \in 1/0) \\ -2\vec{\Omega}(5/1) \wedge \vec{U} \end{array} \right\}_G$$

Exprimer ces deux torseurs dans la base \mathcal{B}_5 .

B-4- ETUDE DYNAMIQUE

Le but de cette étude est d'appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique, au centre d'inertie G, à la grappe (5) dans son mouvement par rapport au repère non galiléen $\mathcal{R}_1(H, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

On rappelle que le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) s'écrit dans ce cas sous la forme :

$$\boxed{\left\{ \mathcal{D}(5/1) \right\}_G = \left\{ \tau(\vec{5} \rightarrow 5) \right\}_G + \left\{ \mathcal{D}_{ie}(5, \mathcal{R}_1/0) \right\}_G + \left\{ \mathcal{D}_{ic}(5, \mathcal{R}_1/0) \right\}_G}$$

- On considère la phase d'immersion de la grappe (5) dans le bac au cours de laquelle :
 $\alpha = \alpha_0 = C^{te}$; $y = y_0 = C^{te}$ et x est variable en fonction du temps.
- On suppose que l'action du fluide contenu dans le bac sur la grappe (5) est représentée, au

point G, par le torseur : $\left\{ \tau(\text{fluide} \rightarrow 5) \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{f \dot{\theta}}{h} \vec{y}_s \\ -f \dot{\theta} \vec{z}_i \end{array} \right\}_G$.

$f = \frac{4mh^2}{3} \varepsilon \sqrt{\frac{3g}{4h}}$ est le coefficient d'amortissement ; ε est le coefficient d'amortissement réduit.

- L'action mécanique, au point E, du piston (4) sur la grappe (5), est exprimée, dans la base

$$\mathcal{B}_5, \text{ par le torseur : } \left\{ \tau_{(4 \rightarrow 5)} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{cc} X_E & L_E \\ Y_E & M_E \\ Z_E & 0 \end{array} \right\}_E.$$

- L'accélération de la pesanteur est : $\vec{g} = g \vec{x}_0$.

- B-4-1.** Isoler la grappe (5) et faire l'inventaire des actions mécaniques extérieures exercées sur ce solide.
- B-4-2.** Ecrire, au point G, dans la base \mathcal{B}_5 , le torseur des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide (5) : $\left\{ \tau_{(\bar{5} \rightarrow 5)} \right\}_G$.
- B-4-3.** Déterminer la relation qui découle de l'application du Théorème de la Résultante Dynamique, en projection sur l'axe \bar{y}_5 , au solide (5) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_1 . Cette relation est repérée par ①.
- B-4-4.** Déterminer la relation qui découle de l'application du Théorème du Moment Dynamique, en projection sur l'axe \bar{z}_5 , au solide (5) dans son mouvement par rapport au repère \mathcal{R}_1 . Cette relation est repérée par ②.
- B-4-5.** A partir des relations ① et ②, précédemment établies, déduire l'équation du mouvement de la grappe (5) dans son mouvement par rapport au bâti \mathcal{R}_1 . Cette relation est repérée par ③.
- B-4-6.** Pour étudier la stabilité du mouvement de la grappe (5), on suppose qu'elle effectue de faibles oscillations autour de l'axe \bar{z}_5 : $\theta \ll 1$; $\sin \theta \approx \theta$; $\cos \theta \approx 1$. Montrer que l'équation ③ du mouvement se réduit à celle d'un oscillateur auto excité de la forme : $\ddot{\theta} + 2\varepsilon \Omega_0 \dot{\theta} + \Omega_0^2 (1 - \xi(t)) \theta = 0$ et expliciter la pulsation Ω_0 et la fonction paramétrique $\xi(t)$ en fonction de g , h et \vec{x} .

PARTIE C : AUTOMATIQUE

N.B. : Les parties C-I et C-II sont indépendantes. Les réponses doivent être rédigées sur les documents réponses.

Description du système :

On s'intéresse au système de remplissage des bacs par les produits appropriés. La première partie est consacrée à la détection des niveaux de remplissage des bacs. Celle-ci est effectuée par des capteurs de niveau tout ou rien. La deuxième partie est consacrée à l'asservissement du niveau de produit dans le bac.

Partie C-I : Détection du niveau dans les bacs.

Chaque bac est muni de trois capteurs de niveau v , m et p (voir figure C-1):

- v vaut « 0 » lorsque le bac est à un niveau très bas, inférieur au niveau indiqué par l'emplacement du capteur v ;
- m vaut « 1 » lorsque le niveau moyen est atteint ;
- p vaut « 1 » lorsque le bac est plein.

Si le niveau du produit dans le bac est très bas, une vanne de remplissage V est ouverte afin de remplir à nouveau le bac. Cette vanne se ferme dès que le bac est plein. D'autre part, une lampe rouge L est allumée lorsque le niveau dans le bac est inférieur ou égal au niveau moyen.

Le démarrage du cycle de traitement est conditionné par le remplissage du premier bac qui fait l'objet de cette étude. Un relais X mettant en marche le système est activé lorsque le bac est plein.

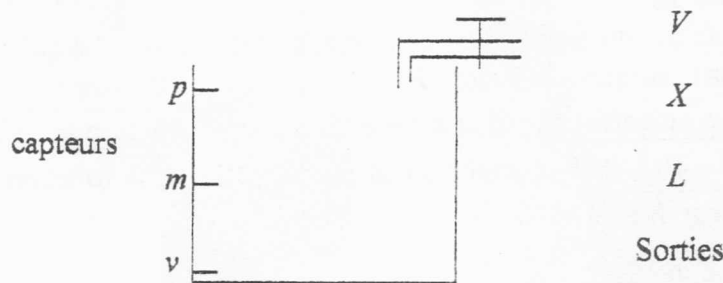


Figure C-1 : Représentation du bac et des entrées/sorties

C-I-1. **Etablir** la table de vérité des sorties V , L et X en fonction des entrées v , m et p .

C-I-2. **Donner** les tableaux de Karnaugh et les équations logiques simplifiées des sorties (V , L et X).

C-I-3. **En déduire** le logigramme des sorties en utilisant des portes logiques élémentaires à deux entrées (NON, ET, OU).

Partie C-II : Etude de l'asservissement du niveau de produit dans le bac.

Le système à étudier est constitué d'un bac contenant le produit, alimenté par une vanne fournissant un débit $q(t)$. On s'intéresse à l'asservissement du niveau $n(t)$ dans le bac.

La fonction de transfert du système est de la forme suivante :

$$T(p) = \frac{N(p)}{Q(p)} = \frac{1-p}{(1+p)^2}$$

où $N(p)$ et $Q(p)$ représentent respectivement les transformées de Laplace de $n(t)$ et de $q(t)$.

Les transformées de Laplace des fonctions utiles sont données dans le tableau C-1.

Tableau C-I :

$F(p)$	$f(t)$ pour $t > 0$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{(p+a)}$	e^{-at}
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}

C-II-1. *Montrer* que, pour une entrée en échelon ($Q(p) = \frac{1}{p}$), $N(p)$ peut se mettre sous la forme : $N(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1+p} + \frac{\gamma}{(1+p)^2}$ et calculer α , β et γ .

C-II-2. *Calculer et tracer* $n(t)$.

C-II-3. Le système caractérisé par la fonction de transfert $T(p)$ est inséré dans la boucle d'asservissement donnée par le schéma bloc de la figure C-2, où $R(p)$ est un régulateur à choisir et $N_{ref}(p)$ est la consigne à suivre.

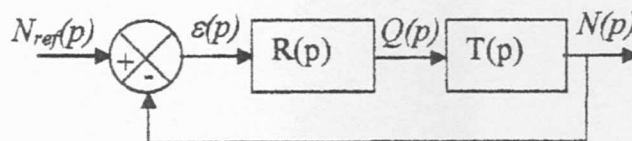


Figure C-2.

C-II-3-1. $R(p) = k_1$, k_1 étant une constante positive.

a) Pour $k_1 = 1$,

- *tracer* les lieux asymptotiques de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(p) = R(p)T(p)$;

- *donner* les marges de gain et de phase du système en boucle fermée.

- *calculer* l'erreur statique.

b) *Calculer* la valeur du gain k_1 permettant d'obtenir une marge de phase de 50° .

C-II-3-2. $R(p) = k_2 \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$, k_2 et T_i étant des paramètres positifs.

a) En appliquant le critère de Routh, *étudier* la stabilité du système en boucle fermée en fonction de k_2 et T_i .

b) Pour $T_i = 1$ s, *calculer* l'erreur de traînage pour une consigne en rampe de pente unitaire en fonction de k_2 . *Déterminer* la valeur de k_2 permettant d'avoir une erreur de traînage égale à 1.