Partie I

1. f nilpotent d'indice q, $f^q = 0$ et $f^{q-1} \neq 0$ soit $x \in E$ tq $f^{q-1}(x) \neq 0$ donc $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ est libre (évident) ona $\dim(vect < (x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)) >) = q \leq n$

2. a) d'après 1. pour $q = n = \dim E$ donc $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E

   b) soit $i \in \mathbb{N}$ pour $j \geq i$ soit $x \in \ker(f^{j+1})$ donc $f^{j+1}(x) = f^{i+1}(f^{j-i}(x)) = 0$ or $f^{i+1} = f^i$ donc $f^i(f^{j-i}(x)) = f^j(x) = 0$ d'où $x \in \ker(f^j)$ par suite $\ker(f^{j+1}) \subseteq \ker(f^j)$ l'autre inclusion est évidente par suite $\ker(f^i) = \ker(f^j)$, pour tout entier naturel $j \geq i$.

   c) soit $i < n$ si $\ker(f^i) = \ker(f^{i+1})$ alors d'après $b)$ pour tout entier naturel $j \geq i$ on a $\ker(f^i) = \ker(f^j)$ par conséquent $\ker(f^i) = \ker(f^n) = E$ donc $f^i \equiv 0$ ce qui est impossible car $i < n$ et n indice de nilpotence de f

   d) on a $\{0\} \subset \ker(f) \subset \cdots \subset \ker(f^n) = E$
   d'où $0 = \dim(\{0\}) < \dim(\ker(f)) < \cdots < \dim(\ker(f^n)) = n$ donc pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\dim(\ker(f^k)) = k$.

3. $(i) \Rightarrow (ii)$ soit f nilpotent d'indice q il existe $x \in E$ tq $f^{q-1}(x) \neq 0$ et $f^q(x) = f(f^{q-1}(x)) = 0$ donc $0 \in sp_{\mathbb{C}}(M)$ d'où $\{0\} \subseteq sp_{\mathbb{C}}(M)$
   réciproquement soit $\lambda \in sp_{\mathbb{C}}(M)$ et $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tq $Mx = \lambda x$ on a $M^q = 0$ donsc $\lambda^q x = 0$ ce qui donne $\lambda = 0$
   $(ii) \Rightarrow (iii)$ $P_f(X) = \displaystyle\prod_{\lambda_i \in sp_{\mathbb{C}}(M)} (\lambda_i - X) = (-1)^n X^n$.
   $(iii) \Rightarrow (i)$ Cayley Hamilton.

4. a) s'il existe i tq $\lambda_i = 0$ ou $i \neq j$ tq $\lambda_i = \lambda_j$ on a det $= 0$ supposons que pour tout $\lambda_i \neq 0$ et pour tout $i \neq j$ $\lambda_i \neq \lambda_j$

   det $= \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \lambda_i P(\lambda_k)$ où P est un polynome en λ_k de degré $k-1$ qui s'annule en $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

   d'où det $= \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \lambda_i (\alpha \prod_{i=1}^{k} (\lambda_k - \lambda_j)$ où α est le coefficient de plus haut dégré de $P(\lambda_k)$ on a par itération det $= \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \lambda_i \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i)$

   b) $tr(f) = 0$ implique $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \omega_i \lambda_i = 0$

   $tr(f^2) = 0$ implique $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \omega_i \lambda_i^2 = 0$

   ...

$tr(f^k) = 0$ implique $\sum_{i=1}^{k} \omega_i \lambda_i^k = 0$

d'où le système

c) si f est nilpotent on a $tr(f) = 0$ si f est nilpotent alors si f^i est nilpotent par suite $tr(f^i) = 0$ reciproquement supposons que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $tr(f^i) = 0$ d'après $b)$ si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de f on a $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ . & . & ... & . \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \dots & \lambda_k^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ . \\ . \\ . \\ \omega_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ d'après $4)a)$ la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ . & . & ... & . \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \dots & \lambda_k^k \end{pmatrix}$ est inversible donc $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_k = 0$ absurde d'où $sp_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ et par suite f est nilpotent

Partie II

1. évident

2. a) par récurrence

   b) soit $x \in \ker(v^k)$ donc $v^k(u(x)) = -\alpha k v^k(x) + u(v^k(x)) = 0$
   d'où $u(x) \in \ker(v^k)$

   c) pour tout k on a $tr[v, v^k] = 0$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $tr(v^k) = 0$ par conséquent v est nilpotent

3. a) d'après $I.1.d)$ $\dim(\ker(v^k)) = k$. d'autre part $(x_1, \dots, x_k) \subset \ker(v^k)$ est une sous famille de $(x_1, \dots, x_n) = (x, v(x), \dots, v^{n-1}(x))$ qui est une base d'après $I.2.a)$ conclusion $(x_1, \dots, x_k)$ est une base de $\ker(v^k)$

   b) on a $\ker(v) = vet(x_1)$. Or d'après $II.2.b)$ $\ker(v)$ est stable par u d'où $u(x_1) = \lambda_1 x_1$.

   c) Conséquence du faite que $\ker(v^k) = (x_1, \dots, x_k)$ est stable par u.

   d) $v(u(x_{k+1})) = u(v(x_{k+1})) - \alpha v(x_{k+1}) = u(v^{n-k}(x)) - \alpha v^{n-k}(x) = u(x_k) - \alpha x_k$

   e) On a $u(x_{k+1}) = \lambda_{k+1} x_{k+1} + \alpha_k x_k + \dots \alpha_1 x_1$
   $u(x_k) = \lambda_k x_k + \beta_{k-1} x_{k-1} + \dots \beta_1 x_1$
   en égalisant dans $II.3.d$ on aurra $\lambda_{k+1} = \lambda_k - \alpha$ et par conséquent $\forall k$ $\lambda_k = \lambda - (k-1)\alpha$.

   f) u admet n valeurs propres distincts deux à deux donc u est diagonalisable.

4. a) $u(e_k) = u(v^{n-k}(e_n)) = v^{n-k}(u(e_n)) + \alpha(n-k)v^{n-k}(e_n) = [\lambda_n + \alpha(n-k)]e_k = \lambda_k e_k$

   b) $v(e_k) = v(v^{n-k}(e_n)) = v^{n-(k-1)}(e_n) = e_{k-1}$. on a $e_n \neq 0$ car e_n est un vecteur propre associée à λ_n. si $e_{n-1} = 0$ alors $v(e_n) = 0$ donc $e_n \in \ker(v) = vect(x_1)$ ce qui est contradictoire avec $\lambda_1 \neq \lambda_n$
   supposons que $e_k \neq 0$ et vérifions que $e_{k-1} \neq 0$ $k \geq 2$ en effet si $e_{k-1} = 0$ alors $v(e_k) = 0$

donc $e_k \in \ker(v) = vect(x_1)$ ce qui est contradictoire avec $\lambda_1 \neq \lambda_k$

c) On a $(e_1, e_2, \dots, e_n) = (v^{n-1}(e_n), v^{n-2}(e_n), \dots, v(e_n), e_n)$
comme $v^{n-1}(e_n) = e_1 \neq 0$ donc d'après $I)2)a)$ $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E

d) $mat(u)_{(e_1,e_2,\dots,e_n)} = diag(\lambda_1, \lambda_1 - \alpha, \dots, \lambda_1 - (n-1)\alpha)$;

$$mat(v)_{(e_1,e_2,\dots,e_n)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

5. Application

a) $AB - BA = B$ $\alpha = 1$ d'après $II)2)C)$ v est nilpotent

b) $sp(u) = \{1, 0, -1\}$ et $\lambda_3 = -1$

c) soit $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $e_2 = v(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_1 = v(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$mat(u)_{(e_1,e_2,e_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } mat(v)_{(e_1,e_2,e_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie III

1. évident

2. a) $< \Phi_A(X), Y > = < [A, X], Y > = tr((AX - XA)^tY) = tr(X^t({}^tAY - Y^tA)) =$
$< X, [{}^tA, Y] > = < X, \Phi_{{}^tA}(Y) >$ d'où le résultat.

   b) On a $Im(\Phi_A) = (\ker(\Phi_A^*))^\perp = \ker(\Phi_{{}^tA}))^\perp$

3. Soit A une matrice nilpotente et $B \in \ker(\Phi_{{}^tA})$ donc ${}^tBA = A^tB$.
A nilpotente et commute avec ${}^tB$ donc A^tB nilpotente et par suite $tr(A^tB) = 0$ ce qui donne $< A, B > = 0$ d'où $A \in \ker(\Phi_{{}^tA}))^\perp = Im(\Phi_A)$
réciproquement si $A \in Im(\Phi_A)$ il existe alors $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tque $AB - BA = A$ c.a.d $[B, A] = -A$ d'où A est nilpotente d'après $II.2.c$

4. Si A est semblable à $2A$ alors $\forall n$ A^n est semblable à 2^nA^n et par suite $tr(A^n) = tr(2^nA^n)$ $\forall n$ ce qui donne $tr(A^n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ d'où A est nilpotente.

5. a) Conséquence de $III.3$

   b) On montre par récurrence que $\forall k$ $AB^k = (B+I)^kA$ d'où $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$ $AQ(B) = Q(B+I)A$

   c) $\forall d$, $AQ_d(B) = Q_d(B+I)A$ si en fait tendre d vers l'infini on aura le résultat

   d) Il suffit de prendre $\lambda = \ln(2)$

Partie IV

1. a) Par récurrence

   b) Conséquence immédiate de $I.4.c$

2. Par récurrence

3. a) Si $k = 1$ on a $AX = 0$ implique $[A, B]X = \lambda X$ implique que $\lambda \in sp_{\mathbb{C}}([A, B]) = \{0\}$ d'où $\lambda = 0$

   b) Si $k > 1$ on a $A^kBX - BA^kX = kABA^{k-1}X - kBA^kX$ d'où $AB(A^{k-1}X) = \frac{\lambda}{k}A^{k-1}X$

   c) Soit λ une valeur propre complexe de AB.
   on a ou bien $\lambda = 0$ ou bien il existe $p > 1$ tque $\frac{\lambda}{p}$ est aussi une valeur propre complexe de AB de meme ou bien $\frac{\lambda}{p} = 0$ et par suite $\lambda = 0$ ou bien il existe $q > 1$ tque $\frac{\lambda}{pq}$ est une valeur propre complexe de AB comme le spectre dans $\mathbb{C}$ de AB est fini on a toujours $\lambda = 0$ et par suite AB est nilpotente.