

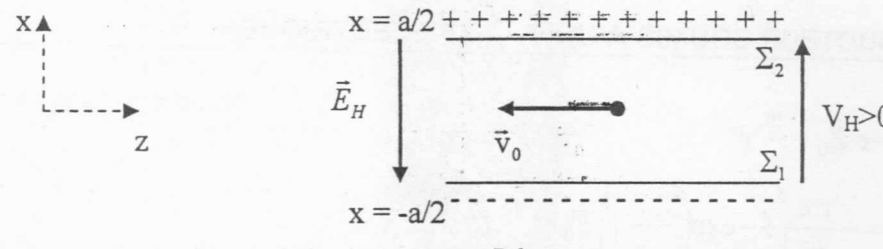
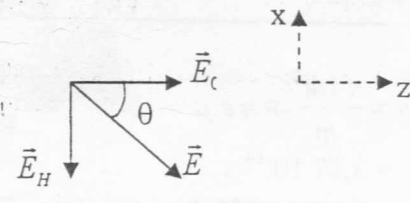
# Concours en Mathématiques et Physique

Session 2007

## Corrigé de l'épreuve de physique



A- CONDUCTION – EFFET HALL		
I- CONDUCTEUR SOUMIS A UN CHAMP ELECTRIQUE		
I.1)	$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}_0 - \frac{m}{\tau} \vec{v}$ $\Rightarrow \vec{v}(t) = -\frac{\tau e}{m} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \vec{E}_0$ <p><math>\tau</math> : temps de relaxation</p>	0.5 1.5 0.5
I.2.a)	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_t = -\frac{\tau e}{m} \vec{E}_0$	1
I.2.b)	$\vec{j} = -n e \vec{v}_t = \frac{n \tau e^2}{m} \vec{E}_0$	1
I.2.c)	$\vec{j} = \gamma \vec{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{n \tau e^2}{m}$	1
I.3.a)	$\vec{v}_t = -\mu \vec{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = -n e \vec{v}_t = n e \mu \vec{E}_0 = \gamma \vec{E}_0$ $\gamma = n e \mu$ <p><math>\gamma_1 = 6.05 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1}</math> et <math>\gamma_2 = 10^2 \text{ S m}^{-1}</math>  <math>\gamma_1 &gt; \gamma_2 \Rightarrow</math> le matériau (1) est plus conducteur que le matériau (2)</p>	1.5 1
I.3.b)	$\gamma = \frac{n \tau e^2}{m} = n e \mu \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{m \mu}{e}$ <p><math>\tau = 3,07 \cdot 10^{-14} \text{ s}</math>                      Le régime permanent est très rapidement atteint.</p>	0.5 0.5 0.5
II- CONDUCTEUR SOUMIS A UN CHAMP ELECTRIQUE ET A UN CHAMP MAGNETIQUE		
Le champ magnétique agit sur les porteurs de charge par l'intermédiaire de la force :		

II.1.a)	$\vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -e \ \vec{v}\  \ \vec{B}\  \vec{u}_x = -\frac{1}{n} \ \vec{j}\  \ \vec{B}\  \vec{u}_x$ <p>Cette force tend à déplacer les électrons du plan <math>x = a/2</math> vers le plan <math>x = -a/2</math>. Les électrons s'accumulent donc sur ce dernier qui se charge négativement. Le plan <math>x = a/2</math> devient déficitaire en électrons et se charge alors positivement. Cette polarisation du matériau conduit donc à l'apparition d'un champ électrique <math>\vec{E}_H</math> dirigé suivant <math>-\vec{u}_x</math>, appelé <i>champ de Hall</i>, qui à son tour agit sur les électrons de conduction par l'intermédiaire de la force électrique <math>-e\vec{E}_H</math>.</p>	2
II.1.b)	<p>L'existence de <math>\vec{E}_H</math> permet de rendre compte de l'apparition, entre les faces <math>\Sigma_1</math> d'équation <math>x = -a/2</math> et <math>\Sigma_2</math> d'équation <math>x = a/2</math>, d'une <i>tension de Hall</i> :</p> $V_H = V_{\Sigma_2} - V_{\Sigma_1} = V(x=a/2) - V(x=-a/2)$	1
II.1.c)	 <p style="text-align: center;"><i>Régime permanent</i></p>	1.5
II.2.a)	<p>En régime permanent <math>\vec{F}_m - e\vec{E}_H = \vec{0}</math></p> $\vec{E}_H = -\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = -R_H \vec{j} \wedge \vec{B} = R_H j B \vec{u}_x$	2
II.2.b)	<p>Au voisinage de <math>\Sigma_1</math> : <math>\vec{E}_H = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \vec{u}_x \Rightarrow \sigma_1 = R_H j B \epsilon_0 &lt; 0</math></p> <p>Au voisinage de <math>\Sigma_2</math> : <math>\vec{E}_H = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \vec{u}_x \Rightarrow \sigma_2 = -R_H j B \epsilon_0</math></p>	1 1
II.2.c)	$V_H = V_{\Sigma_2} - V_{\Sigma_1} = - \int_{-a/2}^{a/2} \vec{E}_H \cdot d\vec{x} = - \int_{-a/2}^{a/2} R_H j B dx = -R_H j B a$ $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s} = j a b \Rightarrow V_H = - \frac{B R_H I}{b}$	2
II.3)	<p>En régime permanent le champ total ressenti par un électron est <math>\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} + \vec{E}_H</math>. Les lignes de champ de <math>\vec{E}</math> font avec celles associées au courant de conduction un angle <math>\theta</math> tel que</p> $\text{tg} \theta = \frac{\ \vec{E}_H\ }{\ \vec{E}_0\ } = \frac{\ \vec{E}_H\ }{\ \vec{j}/\gamma\ } = \gamma B  R_H $ <p>A.N <math>\text{tg} \theta = 5.4 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \theta = 5.4 \cdot 10^{-3} \text{ rad soit } \theta \approx 0.31^\circ</math></p> <p>Sous l'action de <math>\vec{B}</math> les lignes de champ électrique sont faiblement modifiées et sont quasiment parallèles à celles associées au champ de conduction.</p> 	1 0.5 2

II.4.a)	Pour le conducteur métallique : $V_H = 0.89 \mu\text{V}$ Pour le semi-conducteur : $V_H = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ V}$	1 1
II.4.b)	On utilise un semi-conducteur car sa ddp est plus importante et par conséquent l'erreur de mesure serait acceptable. Pour le conducteur métallique l'erreur serait du même ordre de grandeur que la ddp elle même.	1.5
II.4.c)	Comme $V_H$ est inversement proportionnelle à l'épaisseur $b$ de la plaque, on a donc intérêt à choisir l'épaisseur la plus faible possible. Soit $b = 0,1 \text{ mm}$ .	1
	<b>B- PRESSION DE RADIATION</b>	
1)	$\vec{B}_i(M,t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_i(M,t)}{\omega} = \frac{k}{\omega} \underline{E}_i(M,t) \vec{u}_x$ $\vec{B}_i(M,t) = \frac{E_0}{c} e^{i(ky - \omega t)} \vec{u}_x$	0.5
2.a)	$\overline{\text{rot} \vec{B}_i(M,t)} = \mu_0 \left[ \vec{j}(M,t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i(M,t)}{\partial t} \right]$ $\Rightarrow \vec{j} = - \left[ \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_i}{\partial y} + \varepsilon_0 \frac{\partial E_i}{\partial t} \right] \vec{u}_z$	1.5
2.b)	$\text{div} \vec{E}_i(M,t) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ or } \text{div} \vec{E}_i(M,t) = 0 \Rightarrow \rho = 0$	1
3.a)	$d\vec{F}(M,t) = \rho d\tau \vec{E}_i(M,t) + \vec{j}(M,t) d\tau \wedge \vec{B}_i(M,t)$ $\vec{f}(M,t) = \frac{d^3 \vec{F}(M,t)}{d\tau} = \rho \vec{E}_i(M,t) + \vec{j}(M,t) \wedge \vec{B}_i(M,t)$ Or $\rho = 0 \Rightarrow \vec{f}(M,t) = j(M,t) B_i(M,t) \vec{u}_y$ $\vec{f}(M,t) = - \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_i(y,t)}{\partial y} + \varepsilon_0 \frac{\partial E_i(y,t)}{\partial t} \right) B_i(y,t) \vec{u}_y$ $\vec{f}(M,t) = - \left( \frac{1}{\mu_0} B_i(y,t) \frac{\partial B_i(y,t)}{\partial y} + \varepsilon_0 B_i(y,t) \frac{\partial E_i(y,t)}{\partial t} \right) \vec{u}_y$	2
3.b)	MF : $\overline{\text{rot} \vec{E}_i(M,t)} = - \frac{\partial \vec{B}_i(M,t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_i}{\partial y} = - \frac{\partial B_i}{\partial t}$ $\frac{\partial(E_i B_i)}{\partial t} = E_i \frac{\partial B_i}{\partial t} + B_i \frac{\partial E_i}{\partial t} = -E_i \frac{\partial E_i}{\partial y} + B_i \frac{\partial E_i}{\partial t}$ $B_i \frac{\partial E_i}{\partial t} = \frac{\partial(E_i B_i)}{\partial t} + E_i \frac{\partial E_i}{\partial y} = \frac{\partial(E_i B_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{E_i^2}{2} \right)$	

	<p>or <math>\left\langle \frac{\partial(E_i, B_i)}{\partial t} \right\rangle = 0</math>, d'où :</p> $\langle \vec{f} \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{\mu_0} B_i(y, t) \frac{\partial B_i(y, t)}{\partial y} + \epsilon_0 E_i(y, t) \frac{\partial E_i(y, t)}{\partial y} \right] dt \vec{u}_y$	3
3.c)	$\langle \vec{f} \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{B_i^2(y, t)}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2(y, t) \right) dt \vec{u}_y$ $\langle \vec{F}_R \rangle = - \left\langle \int_0^{l_x} \int_0^{l_z} \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{B_i^2(y, t)}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2(y, t) \right) dy dx dz \right\rangle \vec{u}_y$ $\langle \vec{F}_R \rangle = \left\langle \int_0^{l_x} \int_0^{l_z} \left( \frac{B_i^2(0, t)}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2(0, t) \right) dx dz \right\rangle \vec{u}_y$ $\langle \vec{F}_R \rangle = \left\langle \left( \frac{B_i^2(0, t)}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2(0, t) \right) \right\rangle l_x l_z \vec{u}_y$ $\langle \vec{F}_R \rangle = \langle u_{em} \rangle l_x l_z \vec{u}_y$	2 0.5
3.d)	$\langle \vec{F}_R \rangle = P_R l_x l_z \vec{u}_y = P_R dS \vec{u}_y \Rightarrow P_R = \left\langle \left( \frac{B_i^2(0, t)}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2(0, t) \right) \right\rangle$	1
4)	<p>L'ARQS étant valable, le vecteur de déplacement <math>\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i(M, t)}{\partial t}</math> est négligeable devant le courant de conduction <math>\vec{j}(M, t)</math>. L'équation de M-A implique : <math>\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_i}{\partial y} \vec{u}_z</math>. D'après (3.a), l'expression de la force de radiation se réduit à :</p> $\langle \vec{F}_R \rangle = \frac{\langle B_i^2(0, t) \rangle}{2\mu_0} l_x l_z \vec{u}_y$	2
5.a)	<p><u>L'existence de l'onde réfléchie</u></p> <p>Comme <math>\vec{E}_i</math> est perpendiculaire à <math>\vec{k}_i</math> (<math>\vec{E}_i</math> est transverse), le champ <math>\vec{E}_i</math> possède donc une composante tangentielle non nulle. Ce résultat est en contradiction avec la condition aux limites traduisant la continuité de la composante tangentielle de <math>\vec{E}</math> à la traversée d'une surface chargée. En effet, le champ <math>\vec{E}</math> au sein d'un conducteur parfait est nul.</p> <p>Il ne peut y avoir seulement une onde incidente dans le demi espace <math>y &lt; 0</math>, il doit donc y avoir une autre onde <math>\vec{E}_r</math> se propageant dans le même milieu que l'onde incidente : c'est l'onde réfléchie.</p> <p><u>L'origine physique de l'onde réfléchie</u></p> <p>En tombant sur la surface du conducteur, l'onde incidente (<math>\vec{E}_i, \vec{B}_i</math>) interagit avec les électrons libres de celle ci. Ces électrons accélérés vont émettre un rayonnement : c'est l'onde réfléchie.</p> <p><math>\vec{E}_i</math> met en mouvement les électrons <math>\rightarrow \vec{j}(t) \rightarrow \vec{B}(t) \rightarrow \vec{E}(t)</math>.</p>	1.5 1.5

5.b)	$\underline{\bar{E}}_r(M,t) = -E_0 e^{-i(ky+\alpha t)} \underline{\bar{u}}_z$ $\underline{\bar{B}}_r(M,t) = \frac{E_0}{c} e^{-i(ky+\alpha t)} \underline{\bar{u}}_x$ $\underline{\bar{E}}(M,t) = \underline{\bar{E}}_i(M,t) + \underline{\bar{E}}_r(M,t) \Rightarrow \underline{\bar{E}}(M,t) = 2iE_0 \sin(ky) e^{-i\alpha t} \underline{\bar{u}}_z$ $\underline{\bar{B}}(M,t) = \underline{\bar{B}}_i(M,t) + \underline{\bar{B}}_r(M,t) \Rightarrow \underline{\bar{B}}(M,t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(ky) e^{-i\alpha t} \underline{\bar{u}}_x$ <p>L'onde résultante est une onde stationnaire.</p>	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
5.c)	<p>Le vecteur densité de courant au sein du conducteur est volumique et par conséquent le champ magnétique est continu à la surface de ce dernier (<math>y=0</math>) :</p> $\Rightarrow \underline{\bar{B}}(y=0^+,t) = \underline{\bar{B}}(y=0^-,t), \Rightarrow \underline{\bar{B}}_t(0,t) = \underline{\bar{B}}(y=0^-,t) = \underline{\bar{B}}(y=0^+,t)$ $\langle \bar{F}_R \rangle = \frac{4E_0^2}{2\mu_0 c^2} \langle \cos^2 \omega t \rangle \underline{\bar{u}}_y = \varepsilon_0 E_0^2 \ell_x \ell_z \underline{\bar{u}}_y$ $\langle P \rangle = \int_0^{\ell_x} \int_0^{\ell_z} \frac{\underline{\bar{E}}_i \wedge \underline{\bar{B}}_i}{\mu_0} dx dz \underline{\bar{u}}_y = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} \ell_x \ell_z \Rightarrow \langle \bar{F}_R \rangle = \frac{2 \langle P \rangle}{c} \underline{\bar{u}}_y$	2.5 2.5
1)	<p><b>C- RAYONNEMENT DIPOLAIRE</b></p> <p><math>\ \bar{s}\  \ll \lambda</math> : approximation non relativiste</p> <p><math>\ \bar{s}\  \ll \lambda</math> : approximation dipolaire</p> <p><math>\lambda \ll r</math> : zone de rayonnement</p>	0.5 0.5 0.5
2.a)	$\frac{\ \bar{F}_m\ }{\ \bar{F}_e\ } = \frac{\ \bar{v} \wedge \bar{B}\ }{\ \bar{E}\ } = \frac{v B}{E}$ <p>Pour une onde plane, <math>\ \bar{E}\  = c \ \bar{B}\  \Rightarrow \frac{\ \bar{F}_m\ }{\ \bar{F}_e\ } = \frac{v}{c} \ll 1</math>.</p>	1
2.b)	$m \frac{d^2 \bar{s}}{dt^2} = -e \bar{E} - m \omega_0^2 \bar{s} \quad (1)$	1
2.c)	<p>En régime forcé, l'expression du déplacement <math>\bar{s}</math> de l'électron par rapport à sa position d'équilibre est donnée par : <math>\bar{s}(t) = s_0 e^{-i\alpha t} \underline{\bar{u}}_z</math>. La projection de (1) sur Oz donne :</p> $-m \omega^2 s_0 = -m \omega_0^2 s_0 - e E_0 \Rightarrow s_0 = \frac{e E_0}{m (\omega^2 - \omega_0^2)} \approx -\frac{e E_0}{m \omega_0^2}$ $\underline{\bar{s}}(t) \approx -\frac{e E_0}{m \omega_0^2} e^{-i\alpha t} \underline{\bar{u}}_z$	1.5
2.d)	<p>Le moment dipolaire <math>\underline{\bar{p}}(t) = -e \underline{\bar{s}}(t)</math></p> $\Rightarrow \underline{\bar{p}}(t) \approx \frac{e^2 E_0}{m \omega_0^2} e^{-i\alpha t} \underline{\bar{u}}_z$	1



3.a)	<p>Pour un dipôle oscillant constitué de deux charges ponctuelles <math>q(t)</math> et <math>-q(t)</math> distantes de <math>\ell</math> de moment dipolaire <math>\underline{\bar{p}}(t)</math>, on a :</p> $\frac{d\underline{\bar{p}}(t)}{dt} = \ell \frac{dq}{dt} \underline{\bar{u}}_z = \ell I \underline{\bar{u}}_z = \ell I_0 e^{-i\omega t} \underline{\bar{u}}_z$ <p>Dans le cas de l'atome étudié, on a : <math>\frac{d\underline{\bar{p}}(t)}{dt} = -i \frac{\omega e^2 E_0}{m \omega_0^2} e^{-i\omega t} \underline{\bar{u}}_z</math></p> <p>Par analogie, on en déduit que : <math>\ell I_0 = -i \frac{\omega e^2 E_0}{m \omega_0^2}</math></p>	2.5
3.b)	$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 \omega^2  \ell I_0 ^2}{12 \pi c} = \frac{\mu_0 \omega^2 \left( \frac{\omega e^2 E_0}{m \omega_0^2} \right)^2}{12 \pi c}$ $\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{\mu_0 e^4 E_0^2}{12 \pi c m^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$	1
3.c)	<p>La puissance moyenne de l'onde incidente par unité de surface est donnée par :</p> $\langle P_0 \rangle = \frac{\langle \underline{\bar{E}} \wedge \underline{\bar{B}} \rangle}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{2 \mu_0 c}$ $\Rightarrow \frac{\langle P \rangle}{\langle P_0 \rangle} = \frac{\mu_0^2 e^4}{6 \pi m^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$	1.5
4)	$\frac{\langle P \rangle}{\langle P_0 \rangle} = \frac{\mu_0^2 e^4}{6 \pi m^2} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^4$ <p><math>\frac{\langle P \rangle}{\langle P_0 \rangle}</math> est inversement proportionnel à la longueur d'onde <math>\lambda</math> : dans le visible, la puissance maximale rayonnée se trouve dans le bleu.</p>	1
I.1.a)	<p><b>D- TRANSFERT THERMIQUE</b></p> <p>En régime permanent : <math>\Phi(y) = \Phi(y+dy)</math></p> <p><math>J_{th}(y) S = J_{th}(y+dy) S \Rightarrow \frac{dj_{th}}{dy} = 0</math>, or d'après la loi de Fourier : <math>\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dy} \underline{\bar{u}}_y</math></p> $\Rightarrow \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$ $\Rightarrow T(y) = \alpha y + \beta$ <p>en <math>y = \frac{b}{2}</math>, <math>T\left(\frac{b}{2}\right) = \alpha \frac{b}{2} + \beta = T_2</math></p> <p>en <math>y = -\frac{b}{2}</math>, <math>T\left(-\frac{b}{2}\right) = -\alpha \frac{b}{2} + \beta = T_1 \Rightarrow \alpha = \frac{T_2 - T_1}{b}</math> et <math>\beta = \frac{T_1 + T_2}{2}</math></p> $\Rightarrow T(y) = \frac{T_2 - T_1}{b} y + \frac{T_1 + T_2}{2}$	0.5           1

I.1.b)	$\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dy} \vec{u}_y = \lambda \frac{T_1 - T_2}{b} \vec{u}_y$ <p>Ainsi: <math display="block">\Phi = \frac{T_1 - T_2}{b} S \lambda</math></p>	0.5										
2.a)	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%; text-align: center;">Loi de Fourier</th> <th style="width: 50%; text-align: center;">Loi d'Ohm</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;"><math>\vec{j}_{th} = -\lambda \overline{grad} T</math></td> <td style="text-align: center;"><math>\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overline{grad} V</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">la conductivité thermique <math>\lambda</math></td> <td style="text-align: center;">la conductivité électrique <math>\gamma</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">la température <math>T</math></td> <td style="text-align: center;">le potentiel électrique <math>V</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">la puissance thermique <math>P</math></td> <td style="text-align: center;">l'intensité du courant <math>I</math></td> </tr> </tbody> </table>	Loi de Fourier	Loi d'Ohm	$\vec{j}_{th} = -\lambda \overline{grad} T$	$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overline{grad} V$	la conductivité thermique $\lambda$	la conductivité électrique $\gamma$	la température $T$	le potentiel électrique $V$	la puissance thermique $P$	l'intensité du courant $I$	2
Loi de Fourier	Loi d'Ohm											
$\vec{j}_{th} = -\lambda \overline{grad} T$	$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overline{grad} V$											
la conductivité thermique $\lambda$	la conductivité électrique $\gamma$											
la température $T$	le potentiel électrique $V$											
la puissance thermique $P$	l'intensité du courant $I$											
2.b)	<p>Ainsi la résistance thermique est définie par :</p> $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} \Rightarrow R_{th} = \frac{b}{\lambda S}$	1										
<b>II) Approximation d'un milieu continu</b>												
1.a)	<p>En régime permanent, le flux thermique traversant les plaques suivant l'axe Oy est le même donc la résistance thermique d'une épaisseur <math>e</math> du matériau, de surface <math>S</math>, constituée d'un empilement de <math>N</math> éléments <math>P_1 P_2</math> est équivalente à une association en série de résistances.</p>	0.5										
1.b)	<p>La résistance thermique équivalente est la somme des résistances des <math>N</math> plaques constituant l'empilement :</p> $R'_{th} = \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{\lambda_i S} = \frac{N}{S} \left( \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} \right) = \frac{N}{S} \frac{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}{\lambda_1 \lambda_2}$ <p>L'empilement est équivalent à un matériau homogène de section <math>S</math>, d'épaisseur <math>L = N(e_1 + e_2)</math>, de conductivité thermique équivalente <math>\lambda_e</math> et de résistance thermique <math>R_{th}</math> telle que :</p> $R'_{th} = \frac{L}{\lambda_e S} = \frac{N}{S} \frac{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}{\lambda_1 \lambda_2} \Rightarrow \frac{L}{\lambda_e} = N \frac{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}{\lambda_1 \lambda_2}$ $\Rightarrow \lambda_e = \frac{L}{N} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}$ <p>or <math>L = N(e_1 + e_2) \Rightarrow \lambda_e = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e_1 + e_2)}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1}</math></p>	1.5 1 0.5										
1.c)	<p>Si <math>\lambda_1 = \lambda_2</math>, alors <math>\lambda_e = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e_1 + e_2)}{\lambda_2 e_1 + \lambda_1 e_2} = \lambda_1 = \lambda_2</math></p> <p>Résultat cohérent puisque si <math>\lambda_1 = \lambda_2</math>, on forme un matériau homogène. L'expression de <math>R_{th}</math> donnée dans 1.b) est tout à fait pertinente.</p>	1										

2.a)	<p>Bilan thermique en tenant compte, en plus du transfert thermique par conduction, de celui par convection :</p> <p>Pour une tranche du matériau comprise entre <math>y</math> et <math>y+dy</math>, on a :</p> $[\Phi(y) - \Phi(y+dy)] dt = mc dT$ $[j_{th}(y) - j_{th}(y+dy)] \ell a dt - 2h(a+\ell)(T - T_a) dy dt = \rho c \ell a \frac{\partial T}{\partial t} dt dy$ $-\frac{\partial j_{th}}{\partial y} a \ell - 2h(a+\ell)(T - T_a) = \rho c a \ell \frac{\partial T}{\partial t}$ $\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{2h(a+\ell)}{\lambda a \ell} (T - T_a) = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}}$	3
2.b)	<p>En régime permanent, la température <math>T</math> en un point du matériau vérifie l'équation:</p> $\frac{d^2 T}{dy^2} - \frac{2h(a+\ell)}{\lambda a \ell} (T - T_a) = 0$ <p>On pose <math>\theta(y) = T(y) - T_a</math> et <math>k^2 = \frac{2h(a+\ell)}{\lambda a \ell}</math>, on obtient alors :</p> $\frac{d^2 \theta(y)}{dy^2} - k^2 \theta(y) = 0$ <p>dont la solution est de la forme :</p> $\theta(y) = T(y) - T_a = A e^{ky} + B e^{-ky}$ <p>en <math>y = \frac{L}{2}</math>, on a <math>T = T_0 \Rightarrow T_0 - T_a = A e^{kL/2} + B e^{-kL/2}</math></p> <p>en <math>y = -\frac{L}{2}</math>, on a <math>T = T_0 \Rightarrow T_0 - T_a = A e^{-kL/2} + B e^{kL/2}</math></p> $\Rightarrow (A - B) e^{kL/2} + (B - A) e^{-kL/2} = 0 \Rightarrow (A - B) (e^{kL/2} - e^{-kL/2}) = 0$ $\Rightarrow 2(A - B) \operatorname{sh}(kL/2) = 0 \Rightarrow A = B.$ $\Rightarrow T_0 - T_a = A (e^{kL/2} + e^{-kL/2}) = 2A \operatorname{ch}(kL/2)$ $\Rightarrow T_0 - T_a = A (e^{kL/2} + e^{-kL/2}) = 2A \operatorname{ch}(kL/2) \Rightarrow A = \frac{T_0 - T_a}{2 \operatorname{ch}(kL/2)}$ <p>D'où : <math>T_0 - T_a = A (e^{ky} + e^{-ky}) = 2A \operatorname{ch}(y)</math></p> $\boxed{T(y) = T_a + (T_0 - T_a) \frac{\operatorname{ch}(ky)}{\operatorname{ch}(kL/2)}}$ <p>avec <math>k = \sqrt{\frac{2h(a+\ell)}{\lambda a \ell}}</math>.</p>	3.5