REPUBLIQUE TUNISIENNE

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Recherche Scientifique
et de la Technologie
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2007

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والتكنولوجيا
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2007

Concours en Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

Durée : 3 heures	**Date : 09 Juin 2007**	**Heure : 8 H**	**Nb pages : 4**
Barème : Partie I : 5 pts	Partie II : 7 pts	Partie III : 5 pts	Partie IV : 3 pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Notations

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$ et $\mathscr{L}(E)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
Pour tout couple (u, v) d'endomorphismes de E, on note uv l'endomorphisme $u \circ v$.
Pour tout entier naturel i, u^i est l'endomorphisme de E défini par récurrence par $u^{i+1} = u^i u$ et $u^0 = id$, où id désigne l'automorphisme identique de E.
L'image, le noyau, la trace et le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u sont respectivement notés $Im(u)$, $\ker(u)$, $tr(u)$ et P_u.
On rappelle qu'un endomorphisme u est nilpotent s'il existe un entier naturel non nul q tel que $u^q = 0$.
Le plus petit de ces entiers q s'appelle indice de nilpotence de u.

Partie I

Soit f un endomorphisme de E et M sa matrice dans une base $\mathscr{B}$ de E.

1. Montrer que si f est nilpotent d'indice q, alors il existe x dans E tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ est libre. En déduire que $q \leq n$.

2. On suppose que f est nilpotent d'indice n.

   a) Montrer qu'il existe x dans E tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

   b) Soit i un entier naturel.
   Montrer que si $\ker(f^i) = \ker(f^{i+1})$, alors $\ker(f^i) = \ker(f^j)$, pour tout entier naturel $j \geq i$.

   c) Montrer que si $i < n$ alors $\ker(f^i) \neq \ker(f^{i+1})$.

   d) En déduire que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\dim(\ker(f^k)) = k$.

3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

   (i) f est nilpotent.

   (ii) $Sp_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$, où $Sp_{\mathbb{C}}(M)$ désigne le spectre de M sur $\mathbb{C}$.

   (iii) $P_f(X) = (-1)^n X^n$.

4. a) Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ des nombres complexes. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ . & . & \dots . & . \\ . & . & \dots . & . \\ . & . & \dots & . \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \dots & \lambda_k^k \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i).$$

   b) On suppose que $tr(f^i) = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
   Montrer que si la matrice M de f admet $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ comme valeurs propres complexes non nulles, distinctes deux à deux et de multiplicités respectives $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, alors

$$\begin{cases} \omega_1\lambda_1 + \dots + \omega_k\lambda_k = 0 \\ \omega_1\lambda_1^2 + \dots + \omega_k\lambda_k^2 = 0 \\ . \\ . \\ . \\ \omega_1\lambda_1^k + \dots + \omega_k\lambda_k^k = 0 \end{cases}$$

   c) En déduire que f est nilpotent, si et seulement si, $tr(f^i) = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Partie II

Pour tout couple (f, g) d'endomorphismes de E, on note $[f, g] = fg - gf$.

1. Montrer que pour tout triplet (f, g, h) d'endomorphismes de E, $[f, gh] = [f, g]h + g[f, h]$.
   Soit u et v deux endomorphismes de E vérifiant $[u, v] = \alpha v$ où α est un réel non nul.

2. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[u, v^k] = \alpha k v^k$.
   b) En déduire que $\ker v^k$ est stable par u.
   c) Montrer que v est nilpotent.

   Dans la suite de cette partie on suppose que l'indice de nilpotence de v est égal à n.

3. a) Soit $x \in E$ tel que $v^{n-1}(x) \neq 0$.
   Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $x_k = v^{n-k}(x)$.
   Montrer que $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ est une base de $\ker v^k$.
   b) Montrer que x_1 est un vecteur propre de u dont on notera λ_1 la valeur propre associée.
   c) Montrer que la matrice de u dans la base $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est triangulaire supérieure.
   On notera $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les éléments successifs de la diagonale.
   d) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $vu(x_{k+1}) = u(x_k) - \alpha x_k$.
   e) En déduire que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\lambda_k = \lambda_1 - (k-1)\alpha$.
   f) Montrer que u est diagonalisable.

4. Soit e_n un vecteur propre de u associé à λ_n.
   Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$ on note $e_k = v^{n-k}(e_n)$.
   a) Montrer que $u(e_k) = \lambda_k e_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$.
   b) Montrer que $v(e_k) = e_{k-1}, \quad k \in \{2, 3, \dots, n\}$.
   En déduire que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $e_k \neq 0$.
   c) Vérifier que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.
   d) Ecrire les matrices de u et v dans $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

5. **Application**

   On pose $E = \mathbb{R}^3$.
   Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   On note u et v les endomorphismes canoniques respectifs associés à A et B.
   a) Calculer $[u, v]$ et montrer que v est nilpotent.
   b) Déterminer $Sp(u)$ et préciser λ_3.
   c) Trouver une base (e_1, e_2, e_3) selon le procédé décrit dans la question **II.5**.
   Ecrire les matrices de u et v dans la base (e_1, e_2, e_3).

Partie III

$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Pour tout entier naturel k, on note A^k la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par récurrence par $A^{k+1} = A^k A$ et $A^0 = I$, où I désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on note ${}^tA$ la matrice transposée de A et $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Pour tout polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$, $P(A)$ désigne la matrice $\sum_{k=0}^{d} \alpha_k A^k$.
On rappelle que si deux matrices A et B commutent alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
Pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $< A, B >= tr(A^t B)$.

1. Vérifier que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$ est un espace euclidien.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et ϕ_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi_A(B) = [A, B] = AB - BA$.
   a) Montrer que $\phi_A^* = \phi_{{}^tA}$, où ϕ_A^* désigne l'adjoint de ϕ_A.
   b) En déduire que $Im(\phi_A) = (ker(\phi_{{}^tA}))^{\perp}$, où $(ker(\phi_{{}^tA}))^{\perp}$ désigne l'orthogonal de $ker(\phi_{{}^tA})$.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est nilpotente, si et seulement si, $A \in Im(\phi_A)$.
4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.Montrer que si A est semblable à $2A$, alors A est nilpotente.
5. Soit A une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Montrer qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = (I + B)A$.
   b) En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, $AQ(B) = Q(I + B)A$.
   c) En prenant $Q_d(X) = \sum_{k=0}^{d} \frac{\lambda^k}{k!} X^k$. Montrer que $A = \exp(\lambda)\exp(\lambda B) A \exp(-\lambda B)$.
   d) En déduire que A est semblable à $2A$.

Partie IV

Dans cette partie A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $[A, [A, B]] = 0$.

1. a) Montrer que $[A, B]^k = [A, B[A, B]^{k-1}]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   b) En déduire que $[A, B]$ est nilpotente.
2. Montrer que $[A^k, B] = k[A, B]A^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. On suppose de plus A est nilpotente. Soit λ une valeur propre complexe de AB et X un vecteur propre associé à λ.
   Soit k un entier naturel non nul tel que $A^{k-1}X \neq 0$ et $A^k X = 0$.
   a) Montrer que si $k = 1$ alors $\lambda = 0$.
   b) Montrer que si $k > 1$ alors $\frac{\lambda}{k}$ est une valeur propre complexe de AB.
   c) Montrer que AB est nilpotente.