Corrigé de l'épreuve de Mathématiques I
Filière Mathématiques et Physique

Partie I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t)\exp(-itx)| = |f(t)|$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc l'application $t \mapsto f(t)\exp(-itx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue d'après le thm de continuité des intégrales param. De plus $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$|\mathcal{F}(f)(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)\exp(-itx)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f|$$
donc $\mathcal{F}(f)$ bornée sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.En appliquant le théorème de dérivation des intégrales param, il vient que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $p \in \langle 1, k \rangle$
$$(\mathcal{F}(f))^{(p)}(x) = (-i)^p \mathcal{F}(f_p) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4. .

   (a) On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$.

      (i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$ et comme $f' \in L^1$ alors $\int_0^x f'(t)dt$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ donc f admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Cette limite est nulle car $f \in L^1$.

      (ii) On intègre par parties.

   (b) Récurrence sur k.

Partie II

1. (a) La fonction $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto t^p f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $f \in \mathcal{S}$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{p+2}f(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} t^{p+2}f(t) = 0$. Parsuite $f_p(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $f_p(t) \underset{t\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ce qui prouve que f_p est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question I-3 on obtient que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$(\mathcal{F}(f))^{(p)}(x) = (-i)^p \mathcal{F}(f_p)(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

   (b) La fonction $f^{(p)}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus on déduit du fait que $f \in \mathcal{S}$ que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f^{(p)}(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} t^2 f^{(p)}(t) = 0$ ou encore $f^{(p)}(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $f^{(p)}(t) \underset{t\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc $f^{(p)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En utilisant la question I-4-b on obtient que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\mathcal{F}\left(f^{(p)}\right)(x) = (ix)^p \mathcal{F}(f)(x) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(c) D'après la question précédente $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞. De plus pour x non nul

$$\left|x^p(\mathcal{F}(f))^{(q)}(x)\right| = |x^p(-i)^q\mathcal{F}(f_q)(x)| = \left|\frac{1}{x}(ix)^{p+1}\mathcal{F}(f_q)(x)\right| = \left|\frac{1}{x}\mathcal{F}\left(f_q^{(p+1)}\right)(x)\right|$$

Comme $f_q^{(p+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors $\mathcal{F}\left(f_q^{(p+1)}\right)$ est bornée parsuite $\frac{1}{x}\mathcal{F}\left(f_q^{(p+1)}\right)(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty} x^p(\mathcal{F}(f))^{(q)}(x) = \lim_{x\to-\infty} x^p(\mathcal{F}(f))^{(q)}(x) = 0$$

puis $\mathcal{F}(f)\in\mathcal{S}$.

2. .

(a) Soit $h>0$. Comme $f\in\mathcal{S}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(nh)^2 f(nh)=0$. Donc $f(nh)=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui prouve la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(nh)$.

(b) Soit $h>0$. Comme f est intégrable sur $[0,+\infty[$ alors

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx - \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} f(x)\,dx - \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh) = \sum_{n=0}^{+\infty} h\int_n^{n+1}(f(th)-f(r$$

à l'aide d'une intégration par parties, il vient que

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1}(f(th)-f(nh))\,dt &= [(t-n-1)(f(th)-f(nh))]_n^{n+1} - \int_n^{n+1}(t-n-1)\,hf'(th\\ &= \int_n^{n+1}(n+1-t)\,hf'(th)\,dt\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\int_n^{n+1}(f(th)-f(nh))\,dt\right| &= \left|\int_n^{n+1}(n+1-t)\,hf'(th)\,dt\right| \le h\int_n^{n+1}|(n+1-t)\,f'(th)\\ &\le h\int_n^{n+1}|f'(th)|\,dt = \int_{nh}^{(n+1)h}|f'(x)|\,dx\end{aligned}$$

compte tenu du fat que f' est intégrable sur $[0,+\infty[$ on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} f(x)\,dx - \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} h\int_n^{n+1}(f(th)-f(nh))\,dt\right|\\ &\le h\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\int_n^{n+1}(f(th)-f(nh))\,dt\right|\\ &\le h\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{nh}^{(n+1)h}|f'(x)|\,dx = h\int_0^{+\infty}|f'(x)|\,dx\end{aligned}$$

(c) On obtient immédiatement $\lim_{h\to0^+}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} hf(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

(d) On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(-x)$. Alors $g \in \mathcal{S}$. D'après la question précédente la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g(nh)$ converge absolument et

$$\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} hg(nh) = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(-nh)$ est absolument convergente et

$$\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} hf(-nh) = \int_0^{+\infty} f(-x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$$

Finalement la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nh)$ converge et

$$\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} hf(nh) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

3. Soit T un réel strictement positif.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f \in \mathcal{S}$ alors $\lim_{n\to+\infty} (x+nT)^2 f(x+nT) = 0$. Donc $f(x+nT) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui prouve la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x+nT)$. De même la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x-nT)$ est convergente. On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT)$ est convergente.

(b) Remarquer que la fonction $y \mapsto y^2 f(y)$ est continue et a des limites finies en $\pm\infty$ donc elle est bornée par un réel M. On en déduit $|f(y)| \leq \dfrac{M}{y^2}$ pour tout réel y non nul.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$ on a $T + x > 0$ et $T - x > 0$. Alors

$$\begin{aligned} |f_T(x) - f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} f(x+nT) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-nT)\right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |f(x+nT)| + \sum_{n=1}^{+\infty} |f(x-nT)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{(nT+x)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{(nT-x)^2} \end{aligned}$$

Comme les séries de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{M}{(nT+x)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{M}{(nT-x)^2}$ (de variable T) convergent normalement sur $[T_0, +\infty[$ et $\lim_{T\to+\infty} \dfrac{M}{(nT+x)^2} = \lim_{T\to+\infty} \dfrac{M}{(nT+x)^2} = 0$ il vient que

$$\lim_{T\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{(nT+x)^2} = \lim_{T\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{(nT-x)^2} = 0$$

donc $\lim_{T\to+\infty} |f_T(x) - f(x)| = 0$ puis

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(x) = f(x).$$

(c) La T-périodicité de f_T est évidente. Montrons qu'elle de classe C^1.
Les séries de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(x+nT)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(x-nT)$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, les fonction $\varphi_n : x\mapsto f(x+nT)$ et $\psi_n : x\mapsto f(x-nT)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (car $f\in\mathcal{S}$), et pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\varphi_n'(x) = f'(x+nT) \text{ et } \psi_n'(x) = f'(x-nT)$$

La fonction $y\mapsto y^2 f'(y)$ est continue et a des limites finies en $\pm\infty$ donc elle est bornée par un réel M. On en déduit $|f'(y)| \leq \dfrac{M}{y^2}$ pour tout réel y non nul. Soit $a>0$ et $N\in\mathbb{N}$ tel que $a<NT$. Pour $x\in[-a,a]$ et $n\geq N$ on a

$$|\varphi_n'(x)| = |f'(x+nT)| \leq \frac{M}{(x+nT)^2} \leq \frac{M}{(nT-a)^2}$$

et de même

$$|\psi_n'(x)| = |f'(x-nT)| \leq \frac{M}{(nT-a)^2}.$$

Ceci prouve que les séries de fonctions $\sum\limits_{n\geq N}\varphi_n'$ et $\sum\limits_{n\geq N}\psi_n'$ sont normalement convergentes sur $[-a,a]$.
On peut alors conclure que f_T est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

4. .

(a) On a

$$\begin{aligned}
f_T(x)\exp\left(\tfrac{-2i\pi nx}{T}\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+kT)\exp\left(\tfrac{-2i\pi nx}{T}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} f(x+kT)\exp\left(\tfrac{-2i\pi nx}{T}\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x-kT)\exp\left(\tfrac{-2i\pi nx}{T}\right)
\end{aligned}$$

séries normalement convergente sur $[0,T]$ donc on peut intégrer terme à terme

$$\begin{aligned}
c_n(f_T) &= \tfrac{1}{T}\int_0^T f_T(x)\exp\left(\tfrac{-2i\pi nx}{T}\right)dx\\
&= \tfrac{1}{T}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^T f(x+kT)\exp\left(\tfrac{-2i\pi nx}{T}\right)dx + \tfrac{1}{T}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^T f(x-kT)\exp\left(\tfrac{-2i\pi nx}{T}\right)dx\\
&= \tfrac{1}{T}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\exp\left(\frac{-2i\pi n(x-kT)}{T}\right)dx + \tfrac{1}{T}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-kT}^{-(k-1)T} f(x)\exp\left(\frac{-2i\pi n(x+}{T}\right.\\
&= \tfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\exp\left(\tfrac{-2i\pi nx}{T}\right)dx\\
&= \tfrac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\left(\tfrac{-2i\pi nx}{T}\right)dx\\
&= \tfrac{\sqrt{2\pi}}{T}\mathcal{F}(f)\left(\tfrac{2\pi n}{T}\right)
\end{aligned}$$

Le regroupement $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} = \int_{-\infty}^{+\infty}$ est justifié par l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Comme f_T est de de classe C^1 alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est f_T. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_T(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f_T)\exp\left(\tfrac{2i\pi n x}{T}\right) = \tfrac{\sqrt{2\pi}}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)\left(\tfrac{2\pi n}{T}\right)\exp\left(\tfrac{2i\pi n x}{T}\right)$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \mapsto g(u) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f)(u)\exp(-iux).$$

Alors $g \in \mathcal{S}$. Comme $\frac{2\pi}{T} \to 0$ quand $T \to +\infty$, la question II-2-d implique que

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tfrac{2\pi}{T}g\left(n\tfrac{2\pi}{T}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f)(u)\exp(-iux)\,du = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x)$$

d'autre part, la question II-3-b donne

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tfrac{2\pi}{T}g\left(n\tfrac{2\pi}{T}\right) = \lim_{T\to+\infty}\tfrac{\sqrt{2\pi}}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(f)\left(\tfrac{2\pi n}{T}\right)\exp\left(-\tfrac{in2\pi x}{T}\right) = \lim_{T\to+\infty} f_T(-x) = f(-x)$$

On en déduit la formule d'inversion

$$(1) \qquad \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Partie III

1. (a) Evident.
   (b) Récurrence sur n.
   (c) L'application φ_0 est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\varphi_0^{(n)}(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Donc φ_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi_0^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Evident.

3. On pose $\psi_b = \mathcal{F}(g)$ avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_0(-x)$.

   (a) f_0 est de classe C^∞ et à support compact don $f_0 \in \mathcal{S}$. Il vient que $g \in \mathcal{S}$ puis, en utilisant la question II-1-c, on montre que $\psi_b \in \mathcal{S}$.

   (b) .

   (i) On a $\mathcal{F}(\psi_b)(x) = (\mathcal{F}(\mathcal{F}(g)))(x) = g(-x) = f_0(x)$ est strictement positive sur $\left]\frac{1}{b}, b\right[$ et nulle ailleurs.

   (ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\psi_b(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^k\mathcal{F}(g)(t)\,dt = \frac{1}{i^k}\int_{-\infty}^{+\infty}(it)^k\mathcal{F}(g)(t)\,dt \\ &= \frac{1}{i^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}\left(g^{(k)}\right)(t)\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{i^k}\,\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(g^{(k)}\right)\right)(0) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{i^k}g^{(k)}(0) = 0.\end{aligned}$$

Partie IV

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{\cos(2\pi b^n x)}{b^n}\right| \leq \frac{1}{b^n}$. Comme la série $\sum \frac{1}{b^n}$ est convergente alors la série $\sum \frac{\cos(2\pi b^n x)}{b^n}$ converge.

2. D'après la majoration de la question précédente la série de fonctions continues $\sum \frac{\cos(2\pi b^n x)}{b^n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc sa somme W est continue sur $\mathbb{R}$. De la même majoration on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|W(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{\cos(2\pi b^n x)}{b^n}\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{b^n}$$

donc fonction W est bornée sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   (a) La fonction $t \mapsto W(t)\,\psi_b(2\pi b^p(t-x))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle pour $t \notin \left[x + \frac{1}{2\pi b^{p+1}}, x + \frac{1}{2\pi b^{p-1}}\right]$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. Cela justifie la définition de $C_p(x)$.

   (b) Un changement de variable donne

$$\begin{aligned} C_p(x) &= (2\pi b^p)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} W(t)\,\psi_b(2\pi b^p(t-x))\,dt \\ &= (2\pi b^p) \int_{-\infty}^{+\infty} W\left(x + \frac{u}{2\pi b^p}\right)\psi_b(u)\,du \\ &= (2\pi b^p) \int_{\frac{1}{b}}^{b} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(2\pi b^n\left(x + \frac{u}{2\pi b^p}\right)\right)}{b^n}\psi_b(u)\,du \end{aligned}$$

   Une interversion série-intégrale justifiée par la convergence normale sur le segment $\left[\frac{1}{b}, b\right]$, montre que

$$\begin{aligned} C_p(x) &= (2\pi b^p) \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\frac{1}{b}}^{b} \frac{\cos\left(2\pi b^n\left(x + \frac{u}{2\pi b^p}\right)\right)}{b^n}\psi_b(u)\,du \\ &= (2\pi b^p) \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\frac{1}{b}}^{b} \frac{\exp\left(2i\pi b^n\left(x + \frac{u}{2\pi b^p}\right)\right) + \exp\left(-2i\pi b^n\left(x + \frac{u}{2\pi b^p}\right)\right)}{2b^n}\psi_b(u)\,du \\ &= (2\pi b^p) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(2i\pi b^n x)}{2b^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ib^{n-p}u\right)\psi_b(u)\,du \\ &\quad + (2\pi b^p) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(-2i\pi b^n x)}{2b^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ib^{n-p}u\right)\psi_b(u)\,du \\ &= (2\pi b^p)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(2i\pi b^n x)}{2b^n}\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\psi_b)\left(-b^{n-p}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(-2i\pi b^n x)}{2b^n}\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\psi_b)\left(b^{n-p}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(2\pi)^{\frac{3}{2}}\, b^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(-2i\pi b^n x)}{b^n}\mathcal{F}(\psi_b)\left(b^{n-p}\right) \end{aligned}$$

(c) $\mathcal{F}(\psi_b)(b^{n-p}) = 0$ pour tout $n \neq p$ donc

$$|C_p(x)| = \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{3}{2}} \mathcal{F}(\psi_b)(1).$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que W est dérivable en x.

   (a) Utiliser la définition de la dérivabilité.

   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors, en utilisant la question III-3-b-ii

$$\begin{aligned}
C_p(x) &= (2\pi b^p)\int_{-\infty}^{+\infty} W\left(x + \frac{s}{2\pi b^p}\right)\psi_b(s)\,ds \\
&= (2\pi b^p)\int_{-\infty}^{+\infty} \left(W(x) + \frac{s}{2\pi b^p}W'(x) + \frac{s}{2\pi b^p}\varepsilon_x\left(\frac{s}{2\pi b^p}\right)\right)\psi_b(s)\,ds \\
&= (2\pi b^p)\,W(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_b(s)\,ds + W'(x)\int_{-\infty}^{+\infty} s\psi_b(s)\,ds + \int_{-\infty}^{+\infty} s\,\varepsilon_x\left(\frac{s}{2\pi b^p}\right)\psi_b(s)\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} s\,\varepsilon_x\left(\frac{s}{2\pi b^p}\right)\psi_b(s)\,ds
\end{aligned}$$

   (c) En utilisant le théorème de la convergence dominée on obtient $\lim\limits_{p\to+\infty} C_p(x) = 0$.

5. On a prouvé que si W est dérivable en un réel x alors $\lim\limits_{p\to+\infty} C_p(x) = 0$. Or d'après la question IV-3-c $|C_p(x)| = \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{3}{2}}\mathcal{F}(\psi_b)(1)$ ne peut pas tendre vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Cela prouve que W n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.