REPUBLIQUE TUNISIENNE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR,
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ET DE LA TECHNOLOGIE

الجمهورية التونسية

وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والتكنولوجيا

Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2008

Concours en Mathématiques et Physique

Épreuve de Mathématiques II

Durée : 3H00	Date : 7 Juin 2008	Nombre de pages : 4
Barême : Partie I : 6pts	Partie II : 10pts,	Partie III : 4pts

L'usage des calculatrices est strictement interdit.
Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Pour la suite E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note id_E l'application identique de E. Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E et $M_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p avec $p \in \mathbb{N}^*$; s'il existe $a \in E$ vérifiant les trois conditions suivantes

$$\begin{cases} \bullet f^p(a) = a, \\ \bullet \text{ la famille } (a, f(a), \dots, f^{p-1}(a) \text{ est génératrice de } E, \\ \bullet \text{ la famille } (a, f(a), \dots, f^{p-1}(a)) \text{ est constituée d'éléments deux à deux distincts.} \end{cases}$$

Dans ce cas la famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est appelée un cycle de f.

Partie I (Etude d'un exemple)

Dans cette partie, $E = \mathbb{K}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de E de matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. a) Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E.
   b) Calculer $f^3(e_1)$ et en déduire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
   c) En déduire que $f^4 = \mathrm{id}_E$. (On ne demande pas de calculer A^4).
   d) En déduire que f est cyclique d'ordre 4 et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f.

2. a) Calculer le polynôme caractéristique de f.

b) Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, donner un vecteur w non nul tel que $f(w)=\mathrm{i}w$.

(On notera $w=w_1+\mathrm{i}w_2$, avec w_1 et w_2 deux vecteurs à coefficients réels.)

c) Calculer $f(w_1)$ et $f(w_2)$ et en déduire une base $\mathcal{B}_1=(v_1,v_2,v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{R})$.

3. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ qui vérifie: $\varphi(f(x),f(y))=\varphi(x,y)$, pour tous $x,y\in\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que la base $\mathcal{B}_1$ est orthogonale par rapport à φ.

b) Donner la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_1$ en fonction de $\varphi(v_1,v_1)$ et $\varphi(v_2,v_2)$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit définie positive.

d) On suppose que φ est définie positive. Si on se donne un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ de matrice M relativement à la base $\mathcal{B}_1$, donner la matrice de l'endomorphisme adjoint de g relativement à la base $\mathcal{B}_1$.

Partie II

On considère dans cette partie un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p et soit $(a,f(a),\dots,f^{p-1}(a))$ un cycle de f.

1. Montrer que $p\geq n$.

2. a) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $f^p(f^k(a))=f^k(a)$.

b) En déduire que $f^p=\mathrm{id}_E$ et que f est bijective.

c) En déduire que si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et si λ est une valeur propre de f, alors $\lambda^p=1$.

3. On note m le plus grand des entiers naturels k tel que la famille $(a,f(a),\dots,f^{k-1}(a))$ est libre. On note E_m le sous espace de E engendré par: $(a,f(a),\dots,f^{m-1}(a))$.

a) Montrer que $f^m(a)\in E_m$.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout $k\geq m$, le vecteur $f^k(a)$ est dans E_m.

c) En déduire que la famille $(a,f(a),\dots,f^{n-1}(a))$ est une base de E et que $m=n$.

d) En déduire que tout polynôme non nul qui annule f est de degré au moins égal à n.

4. On note $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que: $f^n(a)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kf^k(a)=a_0a+a_1f(a)+a_2f^2(a)+\cdots+a_{n-1}f^{n-1}(a)$.

a) On considère l'endomorphisme g de E défini par: $g=\sum_{k=0}^{n-1}a_kf^k=a_0\,\mathrm{id}_E+a_1f+a_2f^2+\cdots+a_{n-1}f^{n-1}$.

i) Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}$, $g(f^k(a))=f^{n+k}(a)$.

ii) En déduire que $f^n=\sum_{k=0}^{n-1}a_kf^k=a_0\,\mathrm{id}_E+a_1f+a_2f^2+\cdots+a_{n-1}f^{n-1}$.

b) Déterminer la matrice de f relativement à la base $(a,f(a),\dots,f^{n-1}(a))$ à l'aide des coefficients $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$.

c) On suppose dans cette question que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

i) Montrer que $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $\mathrm{rang}(\mathrm{f}-\lambda\,\mathrm{id_E})\geq\mathrm{n}-1$.

ii) En déduire que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1 et que f est diagonalisable.

5. On suppose dans cette question que $n = 2q$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) Montrer que si 1 est une valeur propre de f, alors -1 est une valeur propre de f.

b) Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de f relativement à cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cos\theta_{q-1} & \sin\theta_{q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\sin\theta_{q-1} & \cos\theta_{q-1} \end{pmatrix}$$

avec $\theta_j = \frac{2k_j\pi}{p}$, $j \in \{1, \dots, q-1\}$ et $k_j \in \{1, \dots, p-1\}$

ou

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cos\theta_q & \sin\theta_q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\sin\theta_q & \cos\theta_q \end{pmatrix}$$

avec $\theta_j = \frac{2k_j\pi}{p}$, $j \in \{1, \dots, q\}$ et $k_j \in \{1, \dots, p-1\}$.

6. On suppose dans cette question que $n = 2q+1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) Montrer que f admet une valeur propre $\lambda \in \{-1, 1\}$.

b) Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de f relativement à cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cos\theta_q & \sin\theta_q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\sin\theta_q & \cos\theta_q \end{pmatrix}$$

avec $\theta_j = \frac{2k_j\pi}{p}$, $j \in \{1, \dots, q\}$ et $k_j \in \{1, \dots, p-1\}$

7. On se donne E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n et p un entier $p \geq n$.
Déduire de ce qui précède une méthode de construction d'un endomorphisme cyclique d'ordre p.

8. On se donne un endomorphisme g de E qui commute avec f. On suppose que $g(a) = \sum_{k=0}^{p-1} b_k f^k(a)$.

   On note h l'endomorphisme de E défini par : $h = \sum_{k=0}^{p-1} b_k f^k$.

   a) Montrer que f et h commutent. (i.e. $f \circ h = h \circ f$).

   b) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ h(f^k(a)) = g(f^k(a))$.

   c) En déduire que $g = h$.

   d) En déduire les endomorphismes qui commutent avec f.

9. On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n, avec $\dim E = n$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ un cycle de f.

   a) Montrer que si un nombre complexe λ est une valeur propre de f, alors $\lambda^n = 1$.

   b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$.

   c) Montrer que f est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Partie III

1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels différents deux à deux. On se propose de montrer dans cette question que :

$$W(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

   a) Montrer par récurrence sur n que $P_n(X) = \begin{vmatrix} 1 & X & \cdots & X^{n-1} \\ 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$ est un polynôme de degré $n-1$.

   b) Montrer que $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont des racines de P_n.

   c) En déduire que $W(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)$.

   Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et f un endomorphisme de E **diagonalisable**. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f et $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E);\ g \circ f = f \circ g\}$.

2. a) Montrer que $g \in \mathcal{C}(f)$ si et seulement si g laisse stable les sous espaces propres de f.

   b) Déduire de ce qui précède la dimension de $\mathcal{C}(f)$ en fonction des dimensions des sous espaces propres.

3. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   a) Il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

   b) $\{\mathrm{id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\}$ est un système libre de $\mathcal{L}(E)$.

   c) Toutes les valeurs propres de f sont simples.

   d) $\dim \mathcal{C}(f) = n$.

   (Ind: **Pour démontrer** $d \Rightarrow a$) **prendre le vecteur** $x = v_1 + \ldots + v_n$, **avec** $(v_1, \ldots, v_n)$ **une base de vecteurs propres de** f.)

4. Donner un exemple d'endomorphisme de E tel que il existe un vecteur $x \in E$ avec $\{x, f(x), \ldots, f^{n-}$ est une base de E mais f n'est pas cyclique.