Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2009

# Concours Mathématiques et Physique
# Correction de l'Epreuve de Mathématiques II

## I - Matrices semi-simples

1. Comme $U \notin \ker N$, $NU \neq 0$ et donc l'ensemble en question contient 1. De plus, si $k \in \mathbb{N}^*$ avec $N^k = 0$ alors $k$ majore l'ensemble.

2. Le plus grand élément de l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* : N^k U \neq 0\}$, dont l'existence a été justifiée dans la Question 1, répond à la question.

3. Comme $N$ et $A$ commutent, $\ker N$ est stable par $A$. Or, $A$ est semi-simple et donc, étant stable par $A$, $\ker N$ admet un supplémentaire $F$ dans $\mathbb{C}^n$ stable par $A$.

4. Ceci découle également du fait que $F$ est stable par $A$ et que $N$ est un polynôme en $A$.

5. Si $F$ contient $U \in \mathbb{C}^n$ non nul alors $U \notin \ker N$ et donc, d'après la Question 2, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^m U \neq 0$ et $N^m U \in \ker N$. Or, comme $U \in F$ et $F$ est stable par $N$, $N^m U \in E$. On obtient $0 \neq N^m U \in E \cap \ker N = \{0\}$. Contradiction.

6. D'après la Question 5, $F = \{0\}$ et donc $\ker N = \mathbb{C}^n$. Il vient que $N = 0$ et $A = D$.

## II - Trace et Nilpotence

1. Ceci découle directement du fait qu'une matrice nilpotente n'a que 0 comme valeur propre.

2. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a $AN = NA$. En outre, si $m \in \mathbb{N}^*$ avec $N^m = 0$ alors $qm \in \mathbb{N}^*$ et donc $N^{qm} = 0$. Il vient que $(A^p N^q)^m = A^{pm} N^{qm} = 0$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $AN = NA$; on a

$$D^k = (A - N)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^{k-i} A^i N^{k-i} = A^k + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i (-1)^{k-i} A^i N^{k-i}.$$

   Or, si $i \in \{0, ..., k-1\}$, la matrice $A^i N^{k-i}$ est nilpotente (Question 2. a) ). D'où

$$\operatorname{Tr}\left(A^i N^{k-i}\right) = 0 \text{ pour tout } i \in \{0, ..., k-1\}.$$

   Par suite,

$$\operatorname{Tr}\left(D^k\right) = \operatorname{Tr}\left(A^k\right) + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i (-1)^{k-i} \operatorname{Tr}\left(A^i N^{k-i}\right) = \operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0.$$

(c) Soient $k \in \{1, ..., r\}$ et $m_1, ..., m_r$ les multiplicités respectives de $\lambda_1, ..., \lambda_r$. Il est clair que $\lambda_1^k, ..., \lambda_r^k$ sont les différentes valeurs propres non nulles de $A^k$ et leurs multiplicités respectives sont encore $m_1, ..., m_r$. Donc,

$$\operatorname{Tr}\left(A^k\right) = m_1\lambda_1^k + \cdots + m_r\lambda_r^k.$$

(d) On suppose que $D \neq 0$ et on garde les notations de Question 2. c) Partie II). D'après cette même Question, le $r$-uplet $(m_1, ..., m_r)$ est une solution non nulle du système

$$(S) : \begin{cases} \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r = 0 \\ \cdots \\ \lambda_1^k x_1 + \cdots + \lambda_r^k x_r = 0 \\ \cdots \\ \lambda_1^r x_1 + \cdots + \lambda_r^r x_r = 0. \end{cases}$$

Ceci montre que le déterminant $\Delta$ de $(S)$ est nul. Or, $\Delta$ est un "Vandermonde" et, plus précisément, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0.$$

On aboutit à une contradiction.

(e) On trouve $A = D + N = N$ et $A$ est donc nilpotente.

## III - Groupes d'Exposants Finis de Matrices Inversibles

1. Comme $G$ est fini, le sous-groupe de $G$ engendré par une matrice $A$ de $G$ est cyclique d'ordre noté $o(A)$ (c'est l'ordre de $A$). On pose $m = \prod_{A \in G} o(A)$. Ainsi, si $A \in G$ alors $A^m = \left(A^{o(A)}\right)^{m/o(A)} = (\mathrm{I}_n)^{m/o(A)} = \mathrm{I}_n$. Il vient que $G$ est d'exposant fini.

2. (a) Le polynôme $X^m - 1$ est annulateur de $A$ et c'est un polynôme (scindé !) à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$. Ceci permet de conclure.

   (b) Si $A \in G$ alors, d'après la Question 2. a) Partie III, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = P^{-1}CP$. Donc $C - \mathrm{I}_n$ est diagonale et on a

$$A - \mathrm{I}_n = P^{-1}(C - \mathrm{I}_n)P.$$

   (c) On pose

$$\mathcal{A} = \{z_1 + \cdots + z_m : (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{U}_m\}.$$

   L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U}_m & \to & \mathcal{A} \\ (z_1, ..., z_m) & \mapsto & z_1 + \cdots + z_m \end{array}$$

   est surjective et $\mathbb{U} - m$ est un ensemble fini. Donc, $\mathcal{A}$ est également fini. Or, $\operatorname{Tr}[G]$ est un sous-ensemble de $\mathcal{A}$ et est donc fini.

(d) De toute famille génératrice on peut extraire une base.

(e) i. Soient $M \in \operatorname{Vect}(G)$ et $\alpha_1, ...., \alpha_p \in \mathbb{C}$ tels que

$$M = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p.$$

Comme

$$(\operatorname{Tr}(A_1 A), ..., \operatorname{Tr}(A_p A)) = f(A) = f(B) = (\operatorname{Tr}(A_1 B), ..., \operatorname{Tr}(A_p B)),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(AM) &= \operatorname{Tr}(MA) = \alpha_1 \operatorname{Tr}(A_1 A) + \cdots + \alpha_p \operatorname{Tr}(A_p A) \\ &= \alpha_1 \operatorname{Tr}(A_1 A) + \cdots + \alpha_p \operatorname{Tr}(A_p A) \\ &= \alpha_1 \operatorname{Tr}(A_1 B) + \cdots + \alpha_p \operatorname{Tr}(A_p B) = \operatorname{Tr}(MB) = \operatorname{Tr}(BM).\end{aligned}$$

ii. Soient $M \in \operatorname{Vect}(G)$ et $\alpha_1, ...., \alpha_p \in \mathbb{C}$ tels que

$$M = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_p A_p.$$

Donc,

$$N = B^{-1}M = \alpha_1 B^{-1} A_1 + \cdots + \alpha_p B^{-1} A_p \in \operatorname{Vect}(G).$$

D'après la Question 2. e) i) Partie III,

$$\operatorname{Tr}(AN) = \operatorname{Tr}(BN).$$

D'où

$$\operatorname{Tr}\left(\left(AB^{-1} - \mathrm{I}_n\right) M\right) = \operatorname{Tr}\left(\left(AB^{-1} - \mathrm{I}_n\right) BN\right) = \operatorname{Tr}(AN - BN) = \operatorname{Tr}(AN) - \operatorname{Tr}(BN) =$$

iii. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On observe que

$$\left(AB^{-1} - \mathrm{I}_n\right)^{k-1} = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{C}_k^i (-1)^{k-i} \left(AB^{-1}\right)^i \in \operatorname{Vect}(G).$$

Donc, d'après la Question 2. e) ii) Partie III,

$$\operatorname{Tr}\left(\left(AB^{-1} - \mathrm{I}_n\right)^k\right) = \operatorname{Tr}\left(\left(AB^{-1} - \mathrm{I}_n\right)\left(AB^{-1} - \mathrm{I}_n\right)^{k-1}\right) = 0.$$

Le resultat principal de la Partie III montre que $AB^{-1} - \mathrm{I}_n$ est nilpotente.

iv. La matrice $AB^{-1} - \mathrm{I}_n$ est nilpotente. De plus, $AB^{-1} \in G$ et donc $AB^{-1}$ diagonalisable. Il en est donc de même pour $AB^{-1} - \mathrm{I}_n$ (Question 26). Ceci montre que $AB^{-1} - \mathrm{I}_n$ est nilpotente et diagonalisable. L'unicité de décomposition de Dunford montre que $AB^{-1} - \mathrm{I}_n = 0_n$ et par suite $A = B$.

v. Comme $\operatorname{Tr}[G]$ est un ensemble fini, $\operatorname{Tr}[G] \times \cdots \times \operatorname{Tr}[G]$ ($p$ fois) est également fini. Ainsi, $f$ est injective de $G$ dans un ensemble fini. Ceci prouve que $G$ est fini.