REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي والتكنولوجيا

المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2009

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2009

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Date: Lundi 01 Juin 2009 Heure: 8 H Durée: 4 heures Nb pages: 5
Barème : Partie I: 5 pts Partie II: 8 pts Partie III: 7 pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Ce sujet a pour objet l'étude de quelques propriétés des séries trigonométriques ; il se conclut par une application à la résolution d'un probléme de Dirichlet par une approche variationnelle.

Partie -I-Quelques propriétés des séries trigonométriques

1. (a) Montrer que, pour $x \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{sin(\frac{n+1}{2}x)}{sin(\frac{x}{2})} e^{\frac{inx}{2}}.$$

(b) On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. Montrer que, pour toute suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes et pour tout couple d'entiers naturels (p, q) vérifiant $p + 1 \leq q$, on a

$$\sum_{n=p+1}^{q} b_n \sin(nx) = b_q S_q(x) - b_{p+1} S_p(x) + \sum_{n=p+1}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) S_n(x).$$

2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0 de nombres réels positifs ou nuls.

(a) Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} b_n \sin(nx)$ converge uniformément sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$.

(b) Etudier la convergence simple de $\sum_{n\geq 0} b_n \sin(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles telles que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que a_n tend vers 0 et que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $b_n\sin(nx)$ tend vers 0.

   (b) Dans cette question, on se propose de montrer que la suite b_n tend vers 0.

      i. Calculer $\int_0^\pi (b_n\sin(nx))^2 dx$.

      ii. Conclure dans le cas où la suite (b_n) est bornée.

      iii. Dans le cas général, on pose $b'_n = \inf(1, |b_n|)$. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $b'_n\sin(nx)$ tend vers 0. Conclure.

Partie -II-Pseudo-dérivée seconde au sens de SCHWARZ

Soit f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet au point x une pseudo-dérivée seconde si et seulement si, $\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ existe. Dans ce cas, cette limite est notée

$$D^2f(x)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

Partie A

1. (a) Montrer que si f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, alors $D^2f(x)$ existe en tout point $x\in\mathbb{R}$, et vaut $f''(x)$.

   (b) Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant en tout $x\in\mathbb{R}$ une pseudo-dérivée seconde nulle.

   Soient a, b et ε des réels tels que $a<b$ et $\varepsilon>0$. On pose, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-\varepsilon(x-a)(b-x)$$

   et

$$\psi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+\varepsilon(x-a)(b-x).$$

      i. Vérifier que la fonction φ est continue, $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ et que, $\forall x\in\mathbb{R}$, $D^2\varphi(x)=2\varepsilon$.

      ii. Montrer que φ ne peut pas avoir un maximum strictement positif sur $[a,b]$.

      iii. Vérifier que la fonction ψ est continue, $\psi(a)=\psi(b)=0$ et que, $\forall x\in\mathbb{R}$, $D^2\psi(x)=-2\varepsilon$.

      iv. En déduire que f est affine.
      (Indication: on vérifie que $\varphi\leq 0$, et on montre que ψ ne peut pas avoir un minimum strictement négatif et que $\psi\geq 0$).

Partie B

Jusqu'à la fin de cette partie, $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites réelles telles que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme f est continue sur $\mathbb{R}$. On pose

$$F \;:\; \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)}{n^2},$$

$$G \;:\; \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \begin{cases} \dfrac{4}{x^2}\sin^2(\dfrac{x}{2}) & \text{si } x\neq 0,\\ 1 & \text{si } x=0,\end{cases}$$

et pour tout $h>0$

$$D(x,h)=\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}.$$

1. Justifier l'existence de F sur $\mathbb{R}$, prouver sa continuité et calculer ses coefficients de Fourier $a_n(F)$ et $b_n(F)$.

2. (a) Vérifier que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$G'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}[-\dfrac{4}{x}sin^2(\dfrac{x}{2})+sin(x)] & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

   (b) Montrer G' est intégrable sur $[0,+\infty[$.

3. (a) Vérifier la relation

$$D(x,h)=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))G(nh).$$

   (b) On pose $S_0(x)=0$ et $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$ pour $n\geq 1$.

      i. Justifier l'égalité

$$D(x,h)-f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}[S_n(x)-f(x)][G(nh)-G((n+1)h)].$$

      ii. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction

$$g_n \;:\; \mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\quad h\mapsto -(S_n(x)-f(x))\int_{nh}^{(n+1)h}G'(t)dt.$$

      Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0}g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

iii. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel x, $D^2F(x)$ existe et vaut $f(x)$.

4. (a) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to \int_0^x (x-t)f(t)dt \end{aligned}$$

est de classe C^2 et sa dérivée seconde vaut $f(x)$.

(b) Prouver l'existence de réels α et β tels que pour tout réel x l'on ait

$$F(x) = \alpha x + \beta + \Phi(x), \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\Phi(-\pi) - \Phi(\pi)}{2\pi}.$$

(c) Montrer que Φ' est 2π- périodique.

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = -n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\cos(nx)dx$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = (-1)^{n+1}n(\Phi(\pi) - \Phi(-\pi)) - n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\sin(nx)dx.$$

(e) En utilisant ce qui précède, établir que les suites (a_n) et (b_n) sont les coefficients de Fourier de f, i.e. que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \ \text{ et } \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Partie -III-Application à un problème variationnel

On désigne par E l'espace vectoriel

$$E = \left\{v : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \text{ de classe } C^1, \text{ tel que } \ v(0) = v(\pi) = 0\right\}.$$

Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout x de $[0,\pi]$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$ où $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres réels.

On désigne par $J : E \mapsto \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par

$$\forall v \in E, \quad J(v) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [(v'(x))^2 + (v(x))^2]dx - \int_0^{\pi} f(x)v(x)dx,$$

et on s'intéresse au problème de minimisation suivant

(P) Trouver $u \in E$ tel que pour tout $v \in E$, $J(u) \leq J(v)$.

1. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme coincide avec l'unique application $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique et prolongeant f.

   (b) Montrer que $\widetilde{f}$ est continue et justifier que

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx, \quad \forall n \geq 1.$$

2. (a) Établir, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tous $u, v \in E$, l'identité suivante

$$J((1-t)u+tv)+\frac{t(1-t)}{2}\int_0^\pi [(v'(x)-u'(x))^2+(v(x)-u(x))^2]dx = (1-t)J(u)+tJ(v).$$

   (b) Déduire de la question précédente que si u_1 et u_2 sont solutions de **(P)**, alors

$$\int_0^\pi [(u_1'(x)-u_2'(x))^2+(u_1(x)-u_2(x))^2]dx = 0$$

   et, par suite, $u_1 = u_2$.

3. (a) Montrer que, pour tous $u, v \in E$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$J(u+tv) = J(u)+t\int_0^\pi \left[u'(x)v'(x)+u(x)v(x)-f(x)v(x)\right]dx+\frac{t^2}{2}\int_0^\pi \left[(v')^2(x)+v^2(x)\right]$$

   (b) Montrer que, pour $u \in E$, u est solution de **(P)** si et seulement si, u vérifie le problème suivant:

$$\textbf{(P')} \quad \forall v \in E, \int_0^\pi \left[u'(x)v'(x)+u(x)v(x)\right]dx = \int_0^\pi f(x)v(x)dx.$$

   (Indication: Montrer que u est solution de **(P)**$\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{J(u+tv)-J(u)}{t} = 0, \forall v \in E$).

   (c) Déduire de ce qui précède que si u est une solution de **(P)** alors

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x)\sin(nx)dx = \frac{b_n}{n^2+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\widetilde{u}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{b_n}{n^2+1}\sin(nx)$.

   (a) En écrivant

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n^2}\sin(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{(n^2+1)n^2}\sin(nx),$$

   montrer que $\widetilde{u}$ est une application 2π-périodique de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

   (b) Vérifier que

$$\begin{cases} -\widetilde{u}''+\widetilde{u} = \widetilde{f}, \\ \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

   (c) En déduire que la restriction u de $\widetilde{u}$ à $[0, \pi]$ est de classe C^2 sur $[0, \pi]$ et est solution sur cet intervalle du problème de Dirichlet

$$\textbf{(D)} : \begin{cases} -u''+u = f \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

   (d) Montrer que u est solution de **(P')** et donc de **(P)**.

Fin de l'épreuve