REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي والتكنولوجيا

المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2009

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2009

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

Date: Samedi 06 Juin 2009 Heure: 8 H Durée: 3 heures Nb pages: 4
Barème :

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit.

Comme de coutume, on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ celui des entier naturels non nuls et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Dans tout ce qui suit, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on adopte les notations suivantes:

- $\mathbb{C}[X]$: l'algèbre complexe des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$: l'algèbre complexe des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- I_n : la matrice unité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
- $\mathrm{Tr}(M)$: la trace d'une matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

On rappelle qu'une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite ***nilpotente*** s'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^s = 0$. En outre, une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite ***polynôme*** en une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ s'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = P(A)$. On admettra sans démonstration les deux résultats suivants:

(*) *Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple (D, N) de matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tel que*

$$\begin{cases} D \text{ est diagonalisable.} \\ N \text{ est nilpotente.} \\ A = D + N. \\ DN = ND. \end{cases}$$

La relation $A = D + N$ est appelée ***décomposition de Dunford*** de A.

(**) *Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A. Alors D et N sont des polynômes en A. En particulier, $AD = DA$ et $AN = NA$.*

Le problème suivant a pour objectif de fournir quelques applications des résultats (*) et (**) admis ci-dessus. La partie I est indépendante. En revanche, pour résoudre la Partie III, on a besoin des résultats établis dans la Partie II.

I - Matrices semi-simples

Dans cette partie, on identifie le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ (n fois) au $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ des matrices colonnes à n coefficients dans $\mathbb{C}$.
Soient $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$. On dit que E est ***stable*** par A si

$$AU \in E \quad \text{pour tout } U \in E.$$

La matrice A est dite ***semi-simple*** si, pour tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{C}^n$ stable par A, il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{C}^n$ stable par A tel que

$$\mathbb{C}^n = E \oplus F.$$

L'objectif de cette partie est de montrer que toute matrice semi-simple de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.
Soient A une matrice semi-simple de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. On pose

$$\ker N = \{U \in \mathbb{C}^n : NU = 0\}.$$

(On remarque que $\ker N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$).

1. Montrer que si $U \in \mathbb{C}^n$ tel que $U \notin \ker N$ alors l'ensemble

   $$\left\{k \in \mathbb{N}^* : N^k U \neq 0\right\}$$

   est non vide et majoré.

2. En déduire que si $U \in \mathbb{C}^n$ tel que $U \notin \ker N$ alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^m U \neq 0$ et $N^m U \in \ker N$.

3. En déduire l'existence d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{C}^n$ stable par A tel que

   $$\mathbb{C}^n = F \oplus \ker N.$$

4. Montrer que F est stable par N (on pourra utiliser le résultat (**) de l'introduction).

5. En déduire que $F = \{0\}$ (raisonner par l'absurde en utilisant le résultat de la Question 2).

6. Conclure que A est diagonalisable.

II - Trace et nilpotence

Dans cette partie, on se propose de montrer que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ alors A est nilpotente si, et seulement si,

$$\mathrm{Tr}\left(A^k\right) = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente alors $\mathrm{Tr}\left(A^k\right) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Inversement, on se donne $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose que $\mathrm{Tr}\left(A^k\right) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A.
   (a) Vérifier que $A^p N^q$ est nilpotente pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Tr}\left(D^k\right) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) On suppose que $D \neq 0$ et on note $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres de D telles que
   $$\lambda_k \neq 0 \quad \text{pour tout } k \in \{1, ..., r\}$$
   et
   $$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{pour tous } i, j \in \{1, ..., r\} \text{ avec } i \neq j.$$
   Etablir l'existence de $m_1, ..., m_r \in \mathbb{N}^*$ tels que
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 m_1 & + & \cdots & + & \lambda_r m_r & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ \lambda_1^k m_1 & + & \cdots & + & \lambda_r^k m_r & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ \lambda_1^r m_1 & + & \cdots & + & \lambda_r^r m_r & = & 0 \end{array}\right. \qquad (1 \leq k \leq r)$$
   (d) En déduire que $D = 0$.
   (e) Conclure.

III - Groupes d'exposants finis de matrices inversibles

On dit qu'un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est d'***exposant fini*** s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$A^m = \mathrm{I}_n \quad \text{pour tout } A \in G.$$

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On se propose de montrer que G est d'exposant fini si, et seulement si, G est fini.

1. Montrer que si G est fini alors G est d'exposant fini.
2. Réciproquement, on suppose que G est d'exposant fini. En outre, on pose
   $$\mathbb{U}_m = \{z \in \mathbb{C} : z^m - 1 = 0\}$$
   et on note p la dimension de $\mathrm{Vect}(G)$, le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par G.

(a) Montrer que si $A \in G$ alors A est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{U}_m$.

(b) En déduire que si $A \in G$ alors $A - \mathrm{I}_n$ est diagonalisable.

(c) Vérifier que l'ensemble

$$\mathrm{Tr}\,[G] = \{\mathrm{Tr}\,(A) : A \in G\}$$

est fini

(d) Justifier l'existence d'une base $(A_1, ..., A_p)$ de $\mathrm{Vect}\,(G)$ telle que

$$A_k \in G \quad \text{pour tout } k \in \{1, ..., p\}\,.$$

(e) On considère l' application:

$$\begin{array}{rcl} f: \; G & \to & \mathrm{Tr}\,[G] \times \cdots \times \mathrm{Tr}\,[G] \quad (p \text{ fois}) \\ M & \mapsto & (\mathrm{Tr}\,(A_1 M)\,, ..., \mathrm{Tr}\,(A_p M))\,. \end{array}$$

Soient $A, B \in G$ tels que $f\,(A) = f\,(B)$.

i. Montrer que

$$\mathrm{Tr}\,(AM) = \mathrm{Tr}\,(BM) \quad \text{pour tout } M \in \mathrm{Vect}\,(G)\,.$$

ii. En déduire que

$$\mathrm{Tr}\,\left(\left(AB^{-1} - \mathrm{I}_n\right) M\right) = 0 \quad \text{pour tout } M \in \mathrm{Vect}\,(G)\,.$$

iii. Prouver que la matrice $AB^{-1} - \mathrm{I}_n$ est nilpotente.

iv. Montrer que $A = B$.

v. En déduire que G est fini.

Fin de l'épreuve