Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2009

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 04 Juin 2009	Heure : 8 H 00	Durée : 4 H	Nbre pages : 06
Barème : Problème 1 : 15 pts	;	Problème 2 : 05 pts	

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Données utiles :

- Le vide est caractérisé par sa permittivité électrique $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9}$ F.m^{-1} et sa perméabilité magnétique μ_0
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8$ m.s^{-1}
- Charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19}$ C
- Masse de l'électron : $m = 9,10.10^{-31}$ kg
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38.10^{-23}$ J.K^{-1}
- Constante de Planck : $h = 6,63.10^{-34}$ J.s
- Gradient en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$
- $\text{div}(f.\vec{u}) = f.\text{div}\,\vec{u} + \vec{u}.\overrightarrow{\text{grad}}\, f$

Problème 1

L'espace est rapporté à un référentiel $\Re(Oxyz)$ de base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ la base sphérique.

Dipôle électrostatique dans le vide

On considère un ensemble de deux charges ponctuelles fixes : (-q) en $N\left(0,0,-\frac{a}{2}\right)$ et (+q) en $P\left(0,0,+\frac{a}{2}\right)$ du référentiel $\Re(Oxyz)$ (**Figure 1**). Les quantités a et q sont positives. Un point M dans l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ).

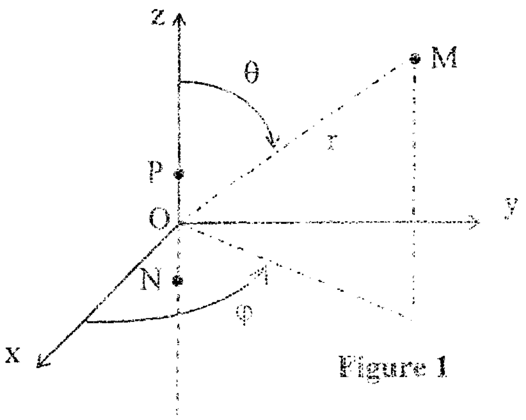

Figure 1

1- Donner l'expression du moment dipolaire $\vec{p}$ de ce doublet de charges.

2- Indiquer, en le justifiant, les variables d'espace dont dépendent le champ et le potentiel électriques créés par ce dipôle.

3- Citer l'approximation dipolaire puis établir l'expression du potentiel $V(M)$ au point M.

4-

4-1- En déduire les composantes $(E_r, E_\theta, E_\varphi)$ du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dans la base sphérique.

4-2- Montrer que $\vec{E}(M)$ peut se mettre sous la forme : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{k(\vec{p}.\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$, où k est un facteur numérique à déterminer.

4-3- Déterminer la norme de $\vec{E}(M)$.

5-

5-1- Déterminer l'équation polaire des surfaces équipotentielles.

5-2- Déterminer l'équation polaire des lignes de champ.

5-3- Représenter leurs allures sur un même schéma.

6- Le dipôle rigide $\vec{p}$ est maintenant plongé dans un champ électrostatique extérieur uniforme $\vec{E}_{ext}$.

6-1- Déterminer les actions mécaniques subies par ce dipôle.

6-2- Déterminer l'énergie potentielle d'interaction U_p du dipôle avec $\vec{E}_{ext}$.

6-3- Etudier les possibilités d'équilibre du dipôle ainsi que leur stabilité.

Approche de l'interaction de Wan Der Waals (VDW) entre deux molécules

Le modèle consiste à considérer une molécule polaire de moment dipolaire $\vec{p}$, placée au point O, et une molécule non polaire, placée au point M où elle subit le champ $\vec{E}(M)$ créé par $\vec{p}$. Etant polarisable, la molécule non polaire acquiert un moment dipolaire induit $\vec{p}_i = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$ où α est une constante.

La force d'interaction entre les deux molécules dérive de l'énergie potentielle $Up = -k'\vec{p}_i.\vec{E}$, où k est un facteur numérique.

7-

7-1- Quelle est l'unité de α ?

7-2- Numériquement $\alpha \approx 10^{-30}$ SI. Proposer une signification de α.

8- Déterminer qualitativement si k' est supérieur, inférieur ou égal à 1.

9- Déterminer, dans la base sphérique, les composantes de la force $\vec{F}$ subie par la molécule en M.

10-1- En réalité, la molécule en O, tourne librement sur elle-même. Sachant que toutes les orientations sont équiprobables, déterminer les valeurs moyennes des composantes de $\vec{F}$.

10-2- Quelle est alors la direction effective de la force d'interaction ? Est-elle attractive ou répulsive ?

Rayonnement dipolaire

Au point O se trouve un dipôle oscillant (**Figure 2**), de moment dipolaire $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\,\vec{u}_z$.

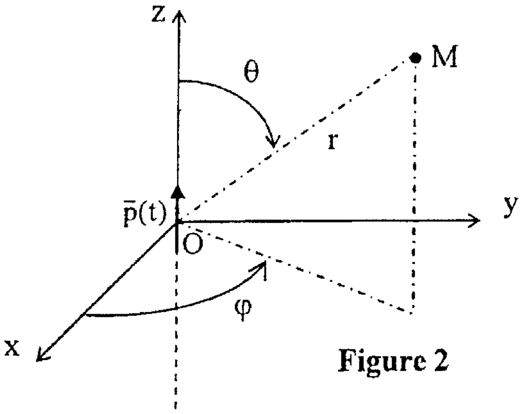

Figure 2

Le potentiel vecteur $\vec{A}(M,t)$ créé par ce dipôle en un point $M(r,\theta,\varphi)$ s'écrit, en notation complexe :

$$\vec{A}(M,t) = j\omega p_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}\,\vec{u}_z$$

11- Déterminer le potentiel scalaire V(M,t). Interpréter le résultat.

12- Donner les expressions des champs électrique $\vec{E}(M,t)$ et magnétique $\vec{B}(M,t)$ en fonction des potentiels vecteurs $\vec{A}(M,t)$ et scalaire V(M,t).

Le calcul du champ électrique donne :

$$\vec{E}(M,t) = \frac{2p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(1 + j\frac{r\omega}{c}\right)e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\,\vec{u}_r + \frac{p_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(1 + j\frac{r\omega}{c} - \left(\frac{r\omega}{c}\right)^2\right)e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\,\vec{u}_\theta$$

13- Justifier que cette expression est en accord avec la symétrie du problème étudié.

14-

14-1- Interpréter les différents termes qui apparaissent dans l'expression de $\vec{E}(M,t)$.

14-2- Définir la zone du rayonnement du dipôle et déduire l'expression du champ électrique rayonné.

15- Sachant que l'onde rayonnée est localement plane, déterminer l'expression du champ magnétique rayonné $\vec{B}(M,t)$.

16- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$, ainsi que sa valeur moyenne dans le temps.

17- Montrer que la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r centrée sur le dipôle, s'écrit : $\mathcal{P}_R = \dfrac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$.

Interpréter le fait que $\mathcal{P}_R$ ne dépend pas de r.

Diffusion Rayleigh du rayonnement électromagnétique

On étudie l'interaction d'une onde électromagnétique plane incidente de champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t - kx)$ avec un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope et non magnétique $(\mu = \mu_0)$ de faible densité N = 10^{25} atomes.m^{-3}. En l'absence du champ électromagnétique, chaque atome possède un moment dipolaire électrique nul.

On adopte le modèle de l'électron élastiquement lié. Chaque atome comporte un électron mobile non relativiste de masse m, de charge q = -e et de vecteur déplacement $\vec{r}$ vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}_0\cos(\omega t)\text{, où } \omega_0 \text{ est une constante positive.}$$

18- Interpréter les différents termes de cette équation différentielle.

19- Citer les approximations adoptées et les justifier.

20- Etablir l'expression de $\vec{r}(t)$ en régime sinusoïdal forcé.

21- En déduire l'expression du moment dipolaire induit $\vec{p}(t)$. Préciser son amplitude $p_0(\omega)$.

22- En déduire la puissance moyenne P_R rayonnée par $\vec{p}(t)$.

23-

23-1- Déterminer la puissance moyenne P_i de l'onde incidente traversant sous incidence normale une surface S.

23-2- En déduire la relation entre P_R et P_i.

24- La puissance rayonnée par diffusion correspond à une diminution de P_i lors de la propagation de l'onde dans le milieu. On admet que P_i varie lentement avec x.

24-1- En faisant un bilan énergétique sur un cylindre de section S situé entre x et x+dx, montrer que :

$$\frac{dP_i(x)}{dx} = -\frac{P_i(x)}{\ell_c}\text{, où } \ell_c \text{ est une grandeur à déterminer.}$$

24-2- Déterminer l'expression de P_i et donner la signification physique de ℓ_c.

25- On se place dans le cas où $\omega \ll \omega_0$ (Diffusion Rayleigh) :

25-1- Montrer que $\ell_c = \dfrac{6\pi\varepsilon_0^2 m^2 c^4 \omega_0^4}{N\omega^4 e^4}$.

25-2- Calculer la valeur de ℓ_c pour des ondes électromagnétiques correspondantes aux radiations rouge ($\lambda_R = 800$ nm) et bleue ($\lambda_B = 400$ nm). La longueur d'onde associée à ω_0 est $\lambda_0 = 122$ nm.

25-3- En déduire une interprétation de la couleur bleue du ciel et de la couleur rouge du soleil couchant.

Rayonnement d'une antenne demi – onde

L'antenne demi – onde est couramment utilisée pour produire des ondes électromagnétiques dans l'espace caractérisé par les constantes du vide (ε_0, μ_0). Cette antenne peut être considérée comme une association de dipôles élémentaires.

On considère une antenne verticale formée d'une tige métallique rectiligne fine, de longueur $L = \dfrac{\lambda}{2}$, parcourue par le courant $i(z,t) = I_0\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}z\right)\cos(\omega t)$, où I_0 est une constante (**Figure 3**).

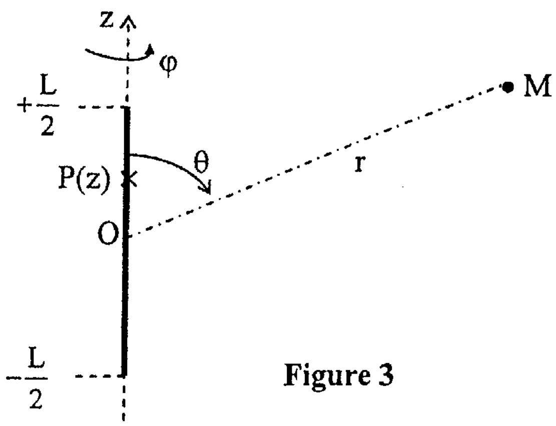

Figure 3

Un élément de longueur dz parcouru par i(z,t) peut être assimilé à un dipôle élémentaire de moment $\delta\vec{p} = \delta p\,\vec{u}_z$ tel que $\frac{\partial}{\partial t}(\delta\vec{p}) = i(z,t)\,dz\,\vec{u}_z$.

26- En utilisant les résultats de la question **14-**, montrer que le champ rayonné au point M par un dipôle élémentaire, placé en O, peut se mettre sous la forme :

$$d\vec{E}_O(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\delta p(t)\right)\right]_{\left(t-\frac{r}{c}\right)} \sin\theta\ \vec{u}_\theta$$

27- Montrer que le déphasage entre le champ $d\vec{E}_P(M,t)$ créé par un dipôle élémentaire placé en P (OP = z) et $d\vec{E}_O(M,t)$ s'écrit approximativement : $\varphi = \frac{\omega}{c} z\cos\theta$.

28- En déduire le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ rayonné par l'antenne demi – onde.

Simplifier l'expression trouvée en admettant que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \simeq 0{,}95.\sin^2\theta$.

29- Justifier le fait que le champ magnétique rayonné s'écrit : $\vec{B}(M,t) = \frac{E(M,t)}{c}\vec{u}_\varphi$. Donner alors son expression.

30- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$ ainsi que sa valeur moyenne dans le temps $<\vec{\Pi}(M,t)>$.

31- Tracer l'allure du diagramme de rayonnement de l'antenne $\|<\vec{\Pi}(M,t)>\| = f(\theta)$. Commenter.

32- Déterminer la puissance moyenne rayonnée par l'antenne P_R à travers une sphère de centre O et de rayon r.

33- En déduire la résistance du rayonnement définie par $P_R = \frac{1}{2} R_{ray} I_0^2$.

Problème 2 : Rayonnement thermique

1- Rappeler la définition d'un corps noir.

2- Rayleigh et Jeans proposent un modèle classique dans lequel l'énergie volumique spectrale du corps noir en équilibre à la température T, est donnée par :

$$u_{\nu,RJ} = \frac{8\pi k_B T}{c^3}\nu^2$$

où ν est la fréquence exprimée en Hertz.

2-1- Tracer l'allure de $u_{\nu,RJ}$ en fonction de ν et la comparer à la courbe expérimentale correspondante.

2-2- En déduire une explication de la contradiction appelée historiquement « catastrophe ultra - violette ».

L'interprétation actuelle du rayonnement du corps noir en équilibre à la température T, montre que son énergie volumique spectrale s'écrit :

$$u_\nu(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

3-1- Etudier les cas limites de $u_\nu(\nu,T)$ en fonction de ν.

3-2- Montrer que l'énergie volumique totale u obéit à la loi : $u = a\ T^4$.

Donner l'expression de la constante a et calculer sa valeur numérique.

On donne : $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15}$

4- Déterminer l'expression de l'énergie volumique spectrale $u_\lambda(\lambda,T)$ en fonction de la longueu d'onde λ.

5- Etablir la loi de Wien, liant la longueur d'onde λ_m du maximum d'émission du corps noir à sa température T.

On donne : l'équation $e^x(5-x)=5$ admet la valeur $x_m = 4{,}97$ comme solution.

6- Calculer λ_m et préciser son domaine spectral dans les deux cas :

a- Surface terrestre à T = 300 K.

b- Surface du soleil à T = 5800 K.

On admet, dans la suite, que le soleil possède une forme sphérique de rayon $R_s = 7{,}0.10^8$ m et se comporte comme un corps noir de température $T_s = 5800$ K.

7-1- Rappeler la loi de Stefan. La constante de Stefan vaut $\sigma = 5{,}67.10^{-8}$ SI. Préciser son unité.

7-2- Déterminer la puissance totale P_s rayonnée par le soleil

8- En déduire l'expression de la puissance P_t reçue par la terre.

On note d la distance moyenne de la terre au soleil et R_t le rayon de la terre supposée sphérique.

9-1- En supposant que la terre est un corps noir de température T_0, montrer que $T_0 = T_s\sqrt{\frac{R_s}{2d}}$.

9-2- Calculer la valeur de T_0. Commenter.

On donne $d = 1{,}5.10^{11}$ m.

10- En fait, la terre est entourée par l'atmosphère qui peut être assimilé à une couche sphérique de même centre que la terre et d'épaisseur e très faible ($e \ll R_t$). L'atmosphère de température T_a permet de maintenir le sol à une température T_p' (Effet de Serre).

Le modèle adopté suppose que :

- La terre et l'atmosphère rayonnent comme des corps noirs.
- L'atmosphère absorbe la fraction α du rayonnement solaire et la totalité du rayonnement provenant de la terre.
- La terre absorbe la fraction $(1-\alpha)$ du rayonement solaire et la totalité du rayonnement provenant de l'atmosphère vers la terre.

10-1- Ecrire les équations traduisant les équilibres radiatifs pour l'atmosphère et pour la terre.

10-2- En déduire l'expression de T_p.

10-3- Calculer la valeur numérique de T_p pour $\alpha = 0{,}85$. Commenter le modèle considéré.

Fin de l'Epreuve