Concours Mathématiques et Physique
Correction de l'Epreuve de Mathématiques I

Partie -I-

1. Notons R_a (resp R_b) le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ (resp $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$).

   On a: $\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$ donc $b_n = O(a_n)$ donc $R_b \geq R_a = +\infty$ par suite $\boxed{R_b = +\infty.}$

2. (a) $\forall x > 0$, $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \geq b_1 x$ (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$) donc $\boxed{T(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

   (b) i. Soit $\varepsilon > 0$, on a: $\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc

   $$\exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

   Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$ donc $\boxed{\forall n \geq n_0, |\, a_n - \ell b_n \,|\leq \varepsilon b_n.}$

   ii. $\forall x \geq 0$,

   $$\begin{aligned}
   |S(x) - \ell T(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{n_0}(a_n - \ell b_n)x^n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}(a_n - \ell b_n)x^n\right| \\
   &\leq \sum_{n=0}^{n_0}|a_n - \ell b_n|\, x^n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}|a_n - \ell b_n|\, x^n \\
   &\leq \sum_{n=0}^{n_0}|a_n - \ell b_n|\, x^n + \varepsilon \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} b_n x^n \\
   &\leq \sum_{n=0}^{n_0}|a_n - \ell b_n|\, x^n + \varepsilon T(x), \ (\text{car } \forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0).
   \end{aligned}$$

   donc

   $$\boxed{\forall x \geq 0, \left|\frac{S(x)}{T(x)} - \ell\right| \leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0}|a_n - \ell b_n|\, x^n}{T(x)} + \varepsilon}$$

   (c) $\forall x \geq 0$, on a : $T(x) \geq b_{n_0+1}x^{n_0+1}$ (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$) donc

   $$\frac{\sum_{n=0}^{n_0}|a_n - \ell b_n|\, x^n}{T(x)} \leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0}|a_n - \ell b_n|\, x^n}{b_{n_0+1}x^{n_0+1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

i. donc

$$\exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \geq A : \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - \ell b_n| x^n}{T(x)} \leq \varepsilon$$

d'où

$$\forall x \geq A : \left| \frac{S(x)}{T(x)} - \ell \right| \leq 2\varepsilon$$

parsuite $\boxed{\frac{S(x)}{T(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell}$

3. Soit $a > 0$.

(a) On a

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^{n^2} &= \exp[n^2 \ln(1 + \frac{\ln a}{n})] \\ &= \exp[n^2(\frac{\ln a}{n} - \frac{(\ln a)^2}{2n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2}))] \\ &= \exp[n \ln a].\exp[-\frac{1}{2}(\ln a)^2].\exp[\mathrm{o}(1)]\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} a^n \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\ln a)^2\right).}$$

(b) On applique ce qui précède aux suites suivantes $a_n = \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^{n^2}$ et $b_n = \frac{a^n}{n!} > 0$ on a : $\frac{a_n}{b_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)$ et le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ est $+\infty$ et de somme $\exp(az)$ donc

$$\frac{S(x)}{T(x)} = \frac{S(x)}{\exp(ax)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)$$

par suite

$$\boxed{S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\ln a)^2\right) \exp(ax)}$$

Partie -II-

1. Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-2)^n}{n!} z^n$ est $+\infty$ (d'aprés la règle de D'Alembert) et de somme $\exp(-2z)$ d'où

$$\exp(-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} t^n = \exp(-3t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\boxed{((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est B-convergente et } \underset{n \to +\infty}{\text{Blim}} ((-2)^n) = 0}$

2. Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n}{n!} z^n$ est $+\infty$ (d'aprés la règle de D'Alembert) et de somme $\exp(4z)$ d'où

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} t^n = \exp(3t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc $\boxed{((4)^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas B-convergente}}$

3. (a) D'aprés la règle de D'Alembert le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} z^n$ est $+\infty$ et de somme exp(

(b) On a :

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n = \exp[(a-1)t] = \exp[(Re\,(a)-1)t].\exp[(iIm\,(a))t]$$

<u>$1^{èr}$ cas</u> : $a = 1$, $\exp[(a-1)t] = 1 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

<u>$2^{ème}$ cas</u> : $a \neq 1$,

$$\left|\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n\right| = \exp[(Re\,(a)-1)t].$$

Si $Rea < 1$ alors $|\exp[(a-1)t]| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $Rea > 1$ $|\exp[(a-1)t]| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n$ n'a pas de limite quand $t \to +\infty$.

Si $Rea = 1$, et $a \neq 1$ alors

$$\exp[(a-1)t] = \exp[(iIma)t] = \sin[(Ima)t] + i\cos[(Ima)t]$$

et $\sin[(Ima)t]$ n'admet pas de limite en $+\infty$ (il suffit d'utiliser le critère séquentiel avec la suite $x_n = \frac{\Pi}{2|Ima|} + \frac{n\Pi}{|Ima|}$.)

Conclusion : <u>la suite $(u_n)_n$ est B-convergente si et seulement si $a = 1$ ou $Re\,(a) < 1$</u> et dans ce cas, <u>$\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\ (a^n) = 0$, si $Re\,(a) < 1$ et $\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\ (a^n) = 1$, si $a = 1$.</u>

4. On a d'aprés la partie précédente : $\frac{u_n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{n!}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)$ donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ est $+\infty$ et

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \underset{t\to+\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)\exp[(a-1)t]$$

ce qui donne :

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right) & \text{si} \quad a = 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{si} \quad 1 < a \end{cases}$$

Donc <u>la suite (u_n) est B-convergente ssi $0 < a \leq 1$</u>et <u>$\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\ u_n = 1$, si $a = 1$ et $\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\ u_n = 0$, si $0 < a$</u>

5. Soit $(u_n)_n$.

(a) On suppose que $(u_n)_n$ converge vers l au sens usuel. On considère les deux suites $a_n = \frac{u_n}{n!}$ et $b_n = \frac{1}{n!}$. Alors $b_n > 0$, $\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est $+\infty$ et de somme $\exp(z)$ donc, d'après partie I, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est $+\infty$ et on a

$$\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n}{\exp(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

par suite $(u_n)_n$ est B-convergente et sa B-limite est l.

(b) On a : d'apres ce qui précede la suite $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est B-convergente mais n'est pas convergente.

6. (a) Notons par R_1 (resp R_2) rayon deconvergence de serie $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ (resp $\sum_{n\geq 0} \frac{v_n}{n!} z^n$) alors si on note par R le rayon de convergence de la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n + v_n}{n!} z^n$ on a $R \geq \min(R_1, R_2) = +\infty$, d'autre part

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n + v_n}{n!} t^n = \exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n + \exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} t^n \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n + \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, v_n$$

donc $\boxed{(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est B-convergente et on a : } \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\,(u_n + v_n) = \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n + \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, v_n.}$

Si on note par R_λ rayon de convergence de serie entiére $\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda u_n}{n!} z^n$ alors $R_\lambda \geq R_1 = +\infty$. D'autre part

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda u_n}{n!} t^n = \lambda \exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n$$

donc $\boxed{(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est B-convergente et on a : } \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\,(\lambda u_n) = \lambda. \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n.}$

(b) Si on prend $u_n = v_n = (-2)^n$ les deux suites sont B-convergente mais la suite $u_n v_n = 4^n$ n'est pas B-convergente.

Partie -III-

1. 1^{er} cas : $a = 1$. alors : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = n + 1$, dans ce cas

$$\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} z^n + \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

donc la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n$ est une somme de deux séries entières de rayon de convergence $+\infty$ donc son rayon de convergence $+\infty$ et

$$\exp(-t)\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} t^n = \exp(-t)\left[(t+1)\exp t\right] \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$2^{ème}$ cas : $a \neq 1$. Alors $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ donc

$$\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n = \frac{1}{1-a} \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} - a \sum_{n\geq 0} \frac{a^n z^n}{n!}$$

parsuite $\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence et

$$\exp(-t) \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} t^n = \frac{1}{1-a} - a \exp((a-1)t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-a} \text{ si } Re(a) < 1$$

et n'admet pas de limite dans $\mathbb{C}$ si $Re(a) \geq 1$.

Conclusion : $\boxed{\sum_{n\geq 0} a^n \text{est B-convergente ssi } Re(a) < 1 \text{ et dans ce cas Blim} \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}}$

2. (a) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge au sens usuel alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens usuel donc d'aprés 5)a) Partie -II- (S_n) est B-convergente donc $\sum_{n\geq 0} u_n$est B-convergente et dans ce cas

$$B\text{-}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\ S_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

   (b) On sait que $\sum_{n\geq 0}(-2)^n$est B-convergente d'aprés question précédente et $\sum_{n\geq 0}(-2)^n$ n'est pas convergente au sens usuel.

3. (a) La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{S_{n-1}}{n!} z^n$ est la série primitive de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n$ donc son rayon de convergence $+\infty$.

   (b) Puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n$ est $+\infty$ on peut intégrer terme à terme sur $[0,t]$. Donc

$$\int_0^t (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n r^n}{n!}) dr = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} \int_0^t r^n dr = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} \frac{t^{n+1}}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} t^n.$$

D'autre part $\exp(-r) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} r^n \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} S$, donc $\exp(-r) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} r^n = S + o(1)$ donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} r^n = S e^r + o(e^r).}$$

En intégrant

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} t^n &= \int_0^t (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n r^n}{n!}) dr \\
&= \int_0^t (Se^r + o(e^r))\, dr \\
&= Se^t - S + \int_0^t o(e^r) dr \\
&= Se^t + o(e^t) \text{ (car la fonction exp n'est pas intégrable sur } \mathbb{R}^+)
\end{aligned}$$

Donc

$$e^{-t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_{n-1}}{n!}t^n \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} S.$$

(c) On a : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont B-convergentes donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}=(S_n-S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est B-convergente et $\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n = \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, S_n - \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, S_{n-1} = S-S=0$.

4. (a) Comme

$$\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{n!}z^n=\sum_{n\geq 0}\frac{S_n}{n!}z^n-\sum_{n\geq 1}\frac{S_{n-1}}{n!}z^n$$

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{n!}z^n$ est $+\infty$.

(b) Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1}\frac{S_{n-1}}{n!}z^n$ est $+\infty$ donc G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t\in\mathbb{R},\ G'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}$$

donc F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (produit de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) et on a $\forall t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F'(t) &= e^{-t}G'(t)-e^{-t}G(t)\\
&= e^{-t}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_{n-1}}{n!}t^n\right)\\
&= e^{-t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{S_n}{n!}t^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_{n-1}}{n!}t^n\right)\\
&= e^{-t}\left(S_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{n!}t^n\right)\\
&= e^{-t}\left(u_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n\right)\\
&= e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n
\end{aligned}$$

(c) On a

$$\int_0^T\left(e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n\right)dt=\int_0^T F'(t)dt=F(T)-F(0),$$

or $F(T)\underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} S=B\text{-}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ et $F(0)=e^0G(0)=0$ donc

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T\left(e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n\right)dt=B\text{-}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$$

5. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 au sens usuel donc elle est B-convergente et $\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n=\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

(b) On a : $\left|\frac{u_n}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!}$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ est $+\infty$ et $\forall t \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n &= e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(n+1)}t^n \\
&= e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}t^n \\
&= \frac{e^{-t}}{t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}t^n \\
&= \frac{1-e^{-t}}{t}
\end{aligned}$$

(c) Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est B-convergente alors d'aprés question **4)c)** de la **partie III** la limite $\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \left(e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n\right) dt$ existe

Or

$$e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n = \frac{1-e^{-t}}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

donc $t \to \frac{1-e^{-t}}{t}$ est une fonction positive qui n'est pas intégrable $\mathbb{R}^+$. Ce qui est absurde.

Conclusion : $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ n'est pas B-convergente.}}$

(d) La condition $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ B-convergente et $\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\ u_n = 0$ est necessaire mais n'est pas suffisante pour que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ soit B-convergente.

Partie -IV-

1. D'après question **c)4) partie III**, si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est B-convergente elle est est B-sommable.

2. (a) Soit $v_p = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}(2p+2)^n$, on a :

$$\frac{|v_{p+1}|}{|v_p|} = \frac{(2p+4)^n}{(2p+2)(2p+3)(2p+2)^n} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{(2p)^n}{(2p)^{n+2}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'aprés la règle de D'Alembert $\sum_{p\geq 0} v_p$ converge absolument d'ou l'existance de u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\forall t \in \mathbb{R}$, ona:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} (2p+2)^n \right) t^n \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t(2p+2))^n}{n!} \right) \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{e^{(2p+2)t}}{(2p+1)!} \\
&= e^t \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{e^{(2p+1)t}}{(2p+1)!} \\
&= e^t \sin(e^t)
\end{aligned}$$

(c) La fonction $t \to \sin(e^t)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ (il suffit de prendre la suite $u_n = \ln(\frac{\pi}{2} + n\pi)$, donc la fonction $t \to e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n)!} t^n$ n'admet pas de limite en $+\infty$, par la suite $\sum_{n \geq 0} u_n$ n'est pas B-convergente.

(d) On a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n)!} t^n \right) dt &= \int_0^T e^{-t} e^t \sin(e^t) dt \text{ (IPP)} \\
&= \left[-e^{-t} \cos(e^t) \right]_0^T - \int_0^T e^{-t} \cos(e^t) dt \\
&= -e^{-T} \cos(e^T) + \cos 1 - \int_0^T e^{-t} \cos(e^t) dt
\end{aligned}$$

or $\lim_{T \to +\infty} -e^{-T} \cos(e^T) + \cos(1) = \cos(1)$ et la fonction $t \to e^{-t} \cos(e^t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et integrable au voisinage de $+\infty$,d'où $\lim_{T \to +\infty} \int_0^T e^{-t} \cos(e^t) dt$ existe donc $\lim_{T \to +\infty} \int_0^T \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n)!} t^n \right) dt$ existe par la suite $\sum_{n \geq 0} u_n$ est B-sommable mais n'est pas B-convergente.

3. (a) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument B-sommable alors $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence et pour $p = 0$, l'application $t \to e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $\lim_{T \to +\infty} \int_0^T (e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n)!} t^n) dt$ existe par la suite $\sum_{n \geq 0} u_n$ est B-sommable.

(b) Pour $u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} (2p+2)^n$, on sait que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est B-sommable et

$$e^{-t} \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n = e^{-t} \frac{d}{dt} (e^t \sin(e^t)) = e^{-t} \left[e^t \sin(e^t) \right] + e^t \cos(e^t)$$

comme $\int_0^T e^{-t}e^t\sin(e^t)dt$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $T \to +\infty$ et

$$\int_0^T e^t\cos(e^t)dt = \left[\sin(e^t)\right]_0^T = \sin(e^T) - \sin(1)$$

qui n'admet pas de limite dans $\mathbb{C}$ quand $T \to +\infty$. Donc

$$\int_0^T \left(e^{-t}\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n\right)dt = \int_0^T e^{-t}e^t\sin(e^t)dt + \int_0^T e^t\cos(e^t)dt$$

n'admet pas de limite dans $\mathbb{C}$ quand $T \to +\infty$ parsuite $t \to e^{-t}\frac{d}{dt}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{(n)!}t^n$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ par la suite $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ n'est pas absolument B-sommable.

4. Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente alors $\sum\limits_{n\geq 0}|u_n|$ est convergente donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n\geq 0}|u_{n+p}|$ est convergente donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n\geq 0}|u_{n+p}|$ est B-convergente donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{u_{n+p}}{n!}z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et d'aprés question **c)4)partie -III-** $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{T\to+\infty}\int_0^T \left(e^{-t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{|u_{n+p}|}{n!}t^n\right)dt$ existe dans $\mathbb{C}$. Or

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ e^{-t}\left|\frac{d^p}{dt^p}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n\right| = e^{-t}\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_{n+p}}{n!}t^n\right| \leq e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|u_{n+p}|}{n!}t^n$$

donc l'application $\forall p \in \mathbb{N}$ l'application $t \to e^{-t}\frac{d^p}{dt^p}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, par suite

$\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ est absolument B-sommable.}}$