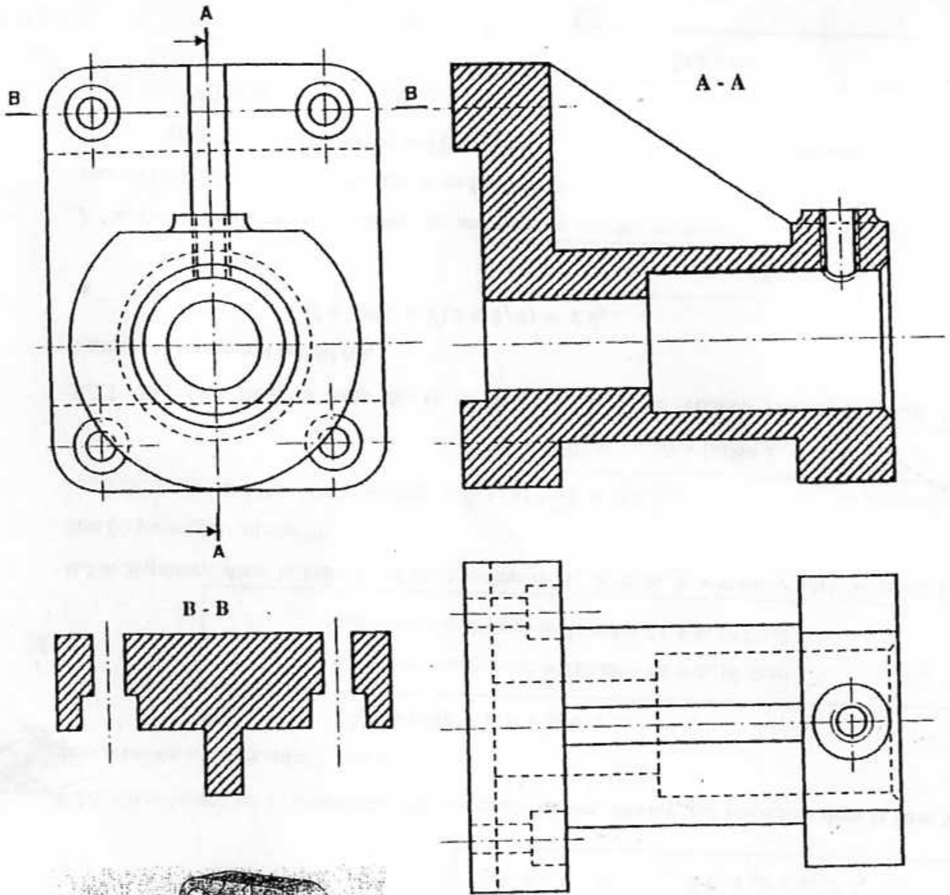
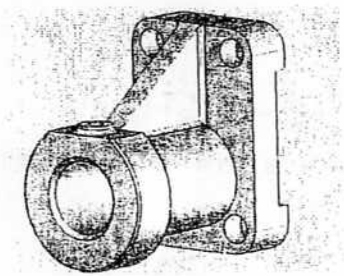
PARTIE A : TECHNOLOGIE DE CONCEPTION

On définit le support colonne du fauteuil par les vues de droite et de dessus complètes. On vous demande de compléter la vue de face en coupe A-A et la section sortie B-B.





PARTIE B : MÉCANIQUE GÉNÉRALE

B.1. ETUDE GEOMETRIQUE

B.1.1. Ecrire la relation vectorielle traduisant la fermeture géométrique de la chaine **0-4-5-6-1-0.**

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$$

En déduire, par projection dans la base $\mathcal{B}_0$, deux relations scalaires entre α, θ et λ.

$$a_1 Cos\alpha + b_1 Sin\alpha - (b_6 + \lambda)Cos\theta = a_0 \quad ①$$
$$-a_1 Sin\alpha + b_1 Cos\alpha + (b_6 + \lambda)Sin\theta = b_0 \quad ②$$

B.1.2. Ecrire la relation vectorielle traduisant la fermeture géométrique de la chaine **0-1-2-0.**

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KO} = \vec{0}$$

En déduire, par projection dans la base $\mathcal{B}_0$, les deux relations scalaires qui en découlent.

$$LCos\alpha + LCos\beta = x \quad ③$$
$$LSin\alpha - LSin\beta = 0 \quad ④$$

B.1.3. Exprimer x en fonction de α (vous pouvez vérifier que β = α) : $x = 2LCos\alpha$

B.1.4. Exprimer z en fonction de α : $z = 2LSin\alpha$ ⑤

B.2. ETUDE CINEMATIQUE

B.2.1. Exprimer les torseurs cinématiques représentants ;

B.2.1.1. le mouvement de (1) par rapport à (0) au point O : $\{\upsilon(1/0)\}_O = \begin{Bmatrix} -\dot{\alpha}\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$

B.2.1.2. le mouvement de (2) par rapport à (0) au point A : $\{\upsilon(2/0)\}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}\vec{y}_0 \\ \dot{z}\,\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_A$

B.2.1.3. le mouvement de (3) par rapport à (0) au point A : $\{\upsilon(3/0)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{z}\,\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_A$

B.2.2. Sachant que p_5 est le pas de l'hélice de l'arbre-vis (5) (en mm/rad);

Exprimer $\dot{\lambda}$ en fonction de p_5 et ω_5 : $\dot{\lambda} = p_5\omega_5$

B.2.3. Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_1$, le vecteur vitesse du point D du bras (1) par rapport à (0).

$\vec{V}(D \in 1/0) = \vec{V}(O \in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{OD}$

$$\boxed{\vec{V}(D \in 1/0) = b_1 \dot{\alpha}\, \vec{x}_1 + a_1 \dot{\alpha}\, \vec{z}_1}$$

B.2.4. Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_4$, le vecteur vitesse du point D de l'écrou (6) par rapport à (0).

$\vec{V}\left(D \in \frac{6}{0}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OD}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{BD}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_4} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{BD}$ .... $\overrightarrow{BD} = (\dot{\lambda} + b_6)\vec{x}_4$

$$\boxed{\vec{V}(D \in 6/0) = \dot{\lambda}\, \vec{x}_4 + (\lambda + b_6)\dot{\theta}\, \vec{z}_4}$$

B.2.5. En se basant sur la composition des vecteurs vitesses, déduire, par projection dans la base $\mathcal{B}_0$, deux relations scalaires entre λ, $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$.

$\vec{V}(D \in 1/0) = \cancel{\vec{V}(D \in 1/6)} + \vec{V}(D \in 6/0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} b_1 \dot{\alpha}\, Cos\alpha - a_1 \dot{\alpha}\, Sin\alpha = \dot{\lambda} Cos\theta - (\lambda + b_6)\dot{\theta}\, Sin\theta \\ b_1 \dot{\alpha}\, Sin\alpha + a_1 \dot{\alpha}\, Cos\alpha = \dot{\lambda} Sin\theta + (\lambda + b_6)\dot{\theta}\, Cos\theta \end{array}}$$

B.2.6. Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_0$ et en fonction de L, α et $\dot{\alpha}$, le vecteur vitesse du point J du bras (1) par rapport au bâti (0).

$\vec{V}(J \in 1/0) = \cancel{\vec{V}(O \in 1/0)} + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{OJ} = 2L\dot{\alpha}\, \vec{z}_1$

$$\boxed{\vec{V}(J \in 1/0) = 2L\dot{\alpha}\,(Cos\alpha\, \vec{z}_0 - Sin\alpha\, \vec{x}_0)}$$

B.2.7. Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_0$ et en fonction de $\dot{z}$, le vecteur vitesse du point J du fauteuil (3) par rapport au bâti (0).

$\vec{V}(J \in 3/0) = \vec{V}(A \in 3/0) = \dot{z}\, \vec{z}_0$

$$\boxed{\vec{V}(J \in 3/0) = \dot{z}\, \vec{z}_0}$$

B.2.8. En se basant sur la condition de maintien du contact au point J entre le fauteuil (3) et le bras (1) ($\vec{V}(J \in 3/1).\vec{z}_0 = 0$), déduire $\dot{z}$ en fonction de $\dot{\alpha}$.

$\vec{V}(J \in 3/1) = \vec{V}(J \in 3/0) - \vec{V}(J \in 1/0) = 2L\dot{\alpha}\, Sin\alpha\, \vec{x}_0 + (\dot{z} - 2L\dot{\alpha}\, Cos\alpha)\vec{z}_0$

$\vec{V}(J \in 3/1).\vec{z}_0 = 0 \;\rightarrow\; \dot{z} - 2L\dot{\alpha}\, Cos\alpha = 0$

$$\boxed{\dot{z} = 2L\dot{\alpha}\, Cos\alpha}$$

Exprimer alors la vitesse de glissement au point J de (3) par rapport à (1)

$$\boxed{\vec{V}_g(J \in 3/1) = 2L\dot{\alpha}\, Sin\alpha\, \vec{x}_0}$$

B.3. ACTION DE FROTTEMENT BRAS – FAUTEUIL : phase de montée du fauteuil

B.3.1. Sachant que l'action de (1) sur (3), au cours de sa montée, est définie, au point J, par :

$\vec{R}(1 \to 3) = -X_J\, \vec{x}_0 + Z_J\, \vec{z}_0$ où X_J et Z_J sont deux réels positifs.

Identifier les composantes normale et tangentielle.

$\vec{N}(1 \to 3) = Z_J\, \vec{z}_0$	$\vec{T}(1 \to 3) = -X_J\, \vec{x}_0$

En se basant sur la loi de coulomb, exprimer X_J en fonction de Z_J.

$$\boxed{X_J = f.Z_J}$$

B.3.2. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées sur le fauteuil (3). En déduire, dans la base $\mathcal{B}_0$, le torseur associé à ces actions au point A.

$\{\mathcal{T}(1 \to 3)\} = {}_{B0}\begin{Bmatrix} -X_J & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_J & 0 \end{Bmatrix}_J$; $\{\mathcal{T}(2 \to 3)\} = {}_{B0}\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A$; $\{\mathcal{T}(\vec{g} \to 3)\} = {}_{B0}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -Mg & 0 \end{Bmatrix}_G$

$\vec{M}_A(1 \to 3) = \overrightarrow{AJ} \wedge \vec{R}(1 \to 3) = -xZ_J\, \vec{y}_0$

$\vec{M}_A(\vec{g} \to 3) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{R}(\vec{g} \to 3) = dMg\, \vec{y}_0$

$$\boxed{\{\mathcal{T}(\bar{3} \to 3)\}_A = {}_{\mathcal{B}_0}\begin{Bmatrix} X_A - X_J & 0 \\ 0 & dMg - xZ_J \\ Z_A + Z_J - Mg & 0 \end{Bmatrix}_A}$$

B.3.3. Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_0$, le torseur dynamique au point A du fauteuil (3) au cours de son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$. Les composantes seront exprimées en fonction de z.

$\vec{R}(3/\mathcal{R}_0) = M\vec{\Gamma}(G \in 3/\mathcal{R}_0) = M\ddot{z}\, \vec{z}_0$

$\vec{\sigma}_A(3/\mathcal{R}_0) = [I_A(3)].\cancel{\vec{\Omega}(3/\mathcal{R}_0)} + M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in 3/\mathcal{R}_0) = -Md\dot{z}\, \vec{y}_0$

$\vec{\delta}_A(3/\mathcal{R}_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_A(3/\mathcal{R}_0)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + M.\cancel{\vec{V}(A \in 3/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}_0)} = -Md\ddot{z}\vec{y}_0$

$$\boxed{\{\mathfrak{D}(3/\mathcal{R}_0)\}_A = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & -Md\ddot{z} \\ M\ddot{z} & 0 \end{array}\right\}_A^{\mathcal{B}_0}}$$

B.3.4. Ecrire les équations scalaires traduisant le Principe Fondamental de la Dynamique (P.F.D) appliqué au fauteuil (3) au cours de son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

P.F.D : $\{\mathfrak{D}(3/\mathcal{R}_0)\}_A = \{\mathcal{T}(\bar{3} \to 3)\}_A$ … Car $\mathcal{R}_0$ est supposé galiléen.

Les équations

$X_A - X_J = 0$	**(1)**
$Z_A + Z_J - Mg = M\ddot{z}$	**(2)**
$dMg - xZ_J = -Md\ddot{z}$	**(3)**

Déterminer alors les inconnues des actions mécaniques exercées par les bras (1) et (2) sur le fauteuil (3).

$Z_J = \frac{Md(g+\ddot{z})}{x}$ $\quad X_J = fZ_J = \frac{fMd(g+\ddot{z})}{x}$

$Z_A = M(g+\ddot{z})(1-\frac{d}{x})$ $\quad X_A = X_J = \frac{fMd(g+\ddot{z})}{x}$

B.4. ACTION TRANSMISE PAR LE SYSTEME VIS-ECROU

On considère le système {S} regroupant les bras (1) et (2) et le fauteuil (3) : **S = {1, 2, 3}**.

B.4.1. Exprimer l'énergie cinétique du système {S} au cours de son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

$E_C(S/\mathcal{R}_0) = \cancel{E_C(1/\mathcal{R}_0) + E_C(2/\mathcal{R}_0)} + E_C(3/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2}M\dot{z}^2$ …… Car $m_1 \cong m_2 \cong 0$

$$\boxed{\mathrm{Ec}(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2}M\dot{z}^2}$$

B.4.2. Exprimer la puissance des actions mécaniques extérieures appliquées au système {S} au cours de son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$.

$\mathcal{P}(\bar{S} \to S/\mathcal{R}_0) = \mathcal{P}(\bar{S} \to 1/\mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(\bar{S} \to 2/\mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(\bar{S} \to 3/\mathcal{R}_0)$

$\mathcal{P}(6 \to 1/\mathcal{R}_0) = \vec{R}(6 \to 1).\vec{V}(D \in 1/\mathcal{R}_0) = \vec{R}(6 \to 1).\vec{V}(D \in 6/\mathcal{R}_0) = F\dot{\lambda}$

$\mathcal{P}(0 \to 1/\mathcal{R}_0) = \mathcal{P}(0 \to 2/\mathcal{R}_0) = 0$ car les liaisons sont supposées parfaites

$\mathcal{P}(\vec{g} \to 3/\mathcal{R}_0) = -Mg\vec{z}_0.\dot{z}\vec{z}_0 = -Mg\dot{z}$

$$\boxed{\mathcal{P}(\bar{S} \to S/\mathcal{R}_0) = F\dot{\lambda} - Mg\dot{z}}$$

B.4.3. Exprimer la puissance des actions mécaniques intérieures appliquées au système {S}.

$\mathcal{P}(int.\grave{a}\, S) = \mathcal{P}(1 \leftrightarrow 2) + \mathcal{P}(1 \leftrightarrow 3) + \mathcal{P}(2 \leftrightarrow 3)$

$\mathcal{P}(1 \leftrightarrow 2) + \mathcal{P}(2 \leftrightarrow 3) = 0$ car les liaisons sont supposées parfaites

$\mathcal{P}(1 \leftrightarrow 3) = \vec{R}(1 \to 3).\vec{V}(J \in 3/1) = -X_J\dot{x}$

$$\boxed{\mathcal{P}(int.\grave{a}\, S) = -X_J\dot{x}}$$

B.4.4. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système {S} au cours de son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$. En déduire l'équation permettant de déterminer F.

$\mathcal{P}(\bar{S} \to S/\mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(int.\grave{a}\, S) = \frac{dE_C(S/\mathcal{R}_0)}{dt}$ …… Car $\mathcal{R}_0$ est supposé galiléen

$F\dot{\lambda} - Mg\dot{z} - X_J\dot{x} = M\dot{z}\,\ddot{z}$

$$\boxed{F\dot{\lambda} = M\dot{z}(g+\ddot{z}) + X_J\dot{x}}$$

PARTIE C : AUTOMATIQUE

: COMMANDE SEQUENTIELLE DU SYSTEME D'ELEVATION DU FAUTEUIL

Compléter le Grafcet qui modélise le fonctionnement du système d'élévation du fauteuil donné à figure C.4 ci-dessous.

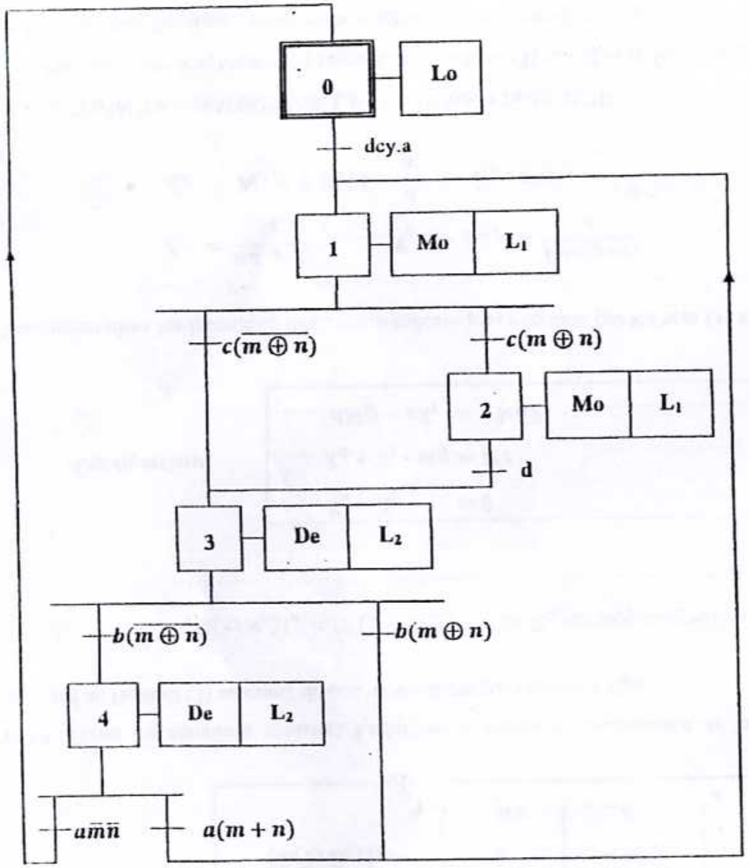


Figure C.4 : Grafcet descriptif du fonctionnement du système d'élévation du fauteuil.

2 : ASSERVISSEMENT DE LA POSITION DU FAUTEUIL

L'objectif de cette partie est d'effectuer la comparaison des performances (dépassement, temps réponse, erreur de position) assurées par deux types de correcteurs.

C.2.1. Le correcteur est de type proportionnel : $C(p) = 1$

Le diagramme de Bode de la réponse en fréquence $G(j\omega)$ est donné par la figure C.5.

C.2.1.1. Préciser les ulsations de cassure.

$\omega_{C1} = \ldots\ldots 0{,}5 \ldots . rad/s$ $\omega_{C2} = \ldots\ldots 1 \ldots . rad/s$

C.2.1.2. Tracer, sur la figure C.5, le diagramme asymptotique de Bode de $G(j\omega)$. Indiquer les pentes du gain.

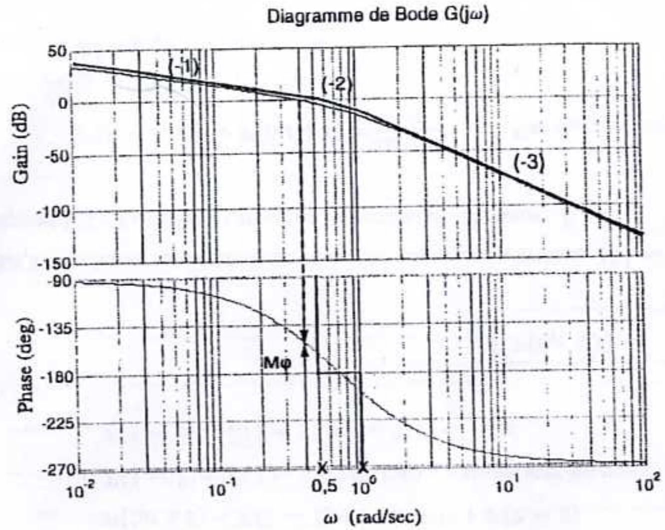


Figure C.5 : Diagramme de Bode de la fonction $G(j\omega)$

C.2.1.3. Déterminer, graphiquement, les valeurs du gain (en décibels) et de l'argument (en degré) de $G(j\omega)$ pour la pulsation $\omega_0 = 0{,}8\, rad/s$. **Donner** la valeur de la marge de phase M_φ. Le système serait-il stable en boucle fermée ?

……… $\omega_0 = 0{,}8\, rad/s$, $G_{dB}(\omega_0) = -11{,}75\, dB$ et $\varphi_G(\omega_0) = -187°$.

D'après la figure C.5, le gain est nul lorsque $\omega_1 = 0{,}4\, rad/s$ et $\varphi_G(\omega_1) = -150°$.

La marge de phase est : $M_\varphi = 180 - 150 = 30°$.

La marge de phase est positive donc le système est stable en boucle fermée.

…………………………………………………………………………………………

C.2.1.4. La réponse indicielle unitaire du système en boucle fermée est donnée par la figure C.3 (trait continu). **Déterminer**, à partir de cette réponse, les valeurs du dépassement $D_\%$, du temps de réponse T_r à 5% et de l'erreur statique de position ε_∞.

$D_\% = \ldots 100 \frac{1{,}4-1}{1} = 0{,}4 = 40\,\%$, … $T_r = \ldots 24{,}6\, s \ldots$ $\varepsilon_\infty = \ldots 0 \ldots$

C.2.1.5. Donner l'expression de la fonction de transfert : $H(p) = \frac{U(p)}{Y_c(p)}$. Sachant que la consigne est un échelon unitaire, **déterminer** la valeur initiale et la valeur finale du signal de commande $u(t)$.

$H(p) = \frac{U(p)}{Y_c(p)} = \ldots\ldots\frac{C(p)}{1+C(p)G(p)} = \frac{p(2p^2+3p+1)}{2p^3+3p^2+p+0,5}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Y_c(p) = \frac{1}{p}\ldots\ldots\ldots\ldots$

Valeur initiale : $\ldots\ldots\ldots u_0 = \lim_{p\to\infty} pU(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{p(2p^2+3p+1)}{2p^3+3p^2+p+0,5} = 1$ ……………………………

Valeur finale : $\ldots\ldots\ldots u_\infty = \lim_{p\to 0} pU(p) = \lim_{p\to 0} \frac{p(2p^2+3p+1)}{2p^3+3p^2+p+0,5} = 0$……………………………

C.2.2. Le correcteur est de type proportionnel dérivé : $C(p) = k(1+\tau_d p), k > 0, \ \tau_d > 0$

C.2.2.1. En utilisant le critère de Routh, **donner** les conditions que doivent vérifier k et τ_d pour avoir un système stable en boucle fermée.

……………………………………………………………………………………………………

…………………… $H_{BF}(p) = \frac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)} = \frac{0,5k(1+\tau_d p)}{2p^3+3p^2+(1+0,5k\tau_d)p+0,5k}$ ……………………

… Tableau de Routh : ……………………………………………………………………………

2	$1+0,5k\tau_d$
3	$0,5k$
$\frac{3(1+0,5k\tau_d)-k}{3}$	0
$0,5k$	

Tous les coefficients de la première colonne doivent être présent et de même signe. Le système est stable si : ………………… $k > 0$ et $\tau_d > \frac{k-3}{1,5k}$……………………………………………

C.2.2.2. **Donner** les expressions du gain (en dB) et de l'argument de $C(j\omega)$ en fonction de k et τ_d.

……$C_{dB} = 20log(k) + 20log\sqrt{1+(\tau_d\omega)^2}$…………$\varphi_C = arctang(\tau_d\omega)$……………………

C.2.2.3. **Calculer** les paramètres du correcteur (k et τ_d) pour assurer une marge de phase $M_\varphi = \frac{\pi}{4}$ à la pulsation $\omega_0 = 0,8\, rad/s$.

……$M_\varphi = \pi + \varphi_G + \varphi_C = \frac{\pi}{4}$, $\quad \varphi_C = -\frac{3\pi}{4} - \varphi_G = arctang(\tau_d\omega_0)$. $\quad \tau_d = \frac{tang(\frac{52\pi}{180})}{\omega_0}$……

……………………………………………………………………………………………………

…$G_{dB} + C_{dB} = 0$, $\quad 20log(k) + 20log\sqrt{1+(\tau_d\omega_0)^2} = 11,75$……………… $\boxed{k = \ldots 2,38\ldots}$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………… $k = 10^{\frac{11.75-20log\sqrt{1+(\tau_d\omega_0)^2}}{20}}$ ……………………………… $\boxed{\tau_d = \ldots 1,6\ s\ \ldots}$

C.2.2.4. La réponse indicielle unitaire du système en boucle fermée obtenue avec le correcteur proportionnel dérivé est donnée par la figure C.3 (trait discontinu). **Déterminer**, à partir de cette réponse, les valeurs du dépassement $D_\%$, du temps de réponse T_r à 5% et de l'erreur statique de position ε_∞.

$D_\% = \ldots 100\frac{1,23-1}{1} = 0,23 = 23\ \%\ldots$ $\quad T_r = \ldots 5,53\ s\ \ldots$ $\quad \varepsilon_\infty = \ldots 0\ldots$

C.2.2.5. Donner l'expression de la fonction de transfert : $H(p) = \frac{U(p)}{Y_c(p)}$. Sachant que la consigne est un échelon unitaire, **déterminer** la valeur initiale et la valeur finale du signal de commande $u(t)$.

$H(p) = \frac{U(p)}{Y_c(p)} = \ldots\frac{C(p)}{1+C(p)G(p)} = \frac{k\,p(1+\tau_d p)(2p^2+3p+1)}{2p^3+3p^2+(1+0,5k\tau_d)p+0,5k}\ldots\ldots\ldots\ldots Y_c(p) = \frac{1}{p}\ldots\ldots$

Valeur initiale : ……$u_0 = \lim_{p\to\infty} pU(p) = \infty$……………………………………………

Valeur finale : ……$u_\infty = \lim_{p\to 0} pU(p) = 0$……………………………………………

C.2.3. Comparer les performances obtenues par les deux types de correcteurs.

	P	**PD**
$D_\%$	40 %	23 %
T_r	25 s	5,53 s
ε_∞	0	0
u_0	1	∞
u_∞	0	0

Stabilité : les deux correcteurs assurent la stabilité du système en boucle en fermée.

Précision : les deux correcteurs donnent une erreur statique de position nulle.

Rapidité : le correcteur PD donne une réponse plus rapide et un dépassement plus faible que ceux donnés par le correcteur P.

Commande : le signal de commande délivré par le correcteur P possède une valeur initiale acceptable. Le signal donné par le correcteur PD a une valeur initiale qui dépasse la valeur maximale d'alimentation du motoréducteur.