Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2010

Concours Mathématiques et Physique
Corrigé de l'Epreuve de Mathématiques II

I - Norme matricielle

Soit
$$S = \{X \in \mathbb{R}^n; \text{ tel que } \|X\|_2 = 1\}$$

On note $\|\!|A|\!\|_2 = \sup\limits_{X\in S}(\|AX\|_2)$

1. Soit $X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ alors $Y = \frac{X}{\|X\|_2} \in S$. Donc $\frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2} = \|MY\|_2 \leq \|\!|M|\!\|_2$. D'où $\|MX\|_2 \leq \|\!|M|\!\|_2\|X\|_2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. $\|\!|\cdot|\!\|_2$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

   (a) $\|\!|A|\!\|_2 = 0$ ca implique que $\|AX\|_2 = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. D'où $AX = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ car $\|\cdot\|_2$ est une norme. Donc $A = 0$

   (b) $\|\!|\lambda A|\!\|_2 = \sup\limits_{X\in S}(\|\lambda AX\|_2) = |\lambda| \sup\limits_{X\in S}(\|AX\|_2)$ car $\|\cdot\|_2$ est une norme. D'où $\|\!|\lambda A|\!\|_2 = |\lambda|\|\!|A|\!\|_2$

   (c) $\|\!|A+B|\!\|_2 = \sup\limits_{X\in S}(\|AX+BX\|_2) \leq \sup\limits_{X\in S}(\|AX\|_2) + \sup\limits_{X\in S}(\|BX\|_2) = \|\!|A|\!\|_2 + \|\!|B|\!\|_2$

3.
$$\begin{aligned}
\|\!|A\cdot B|\!\|_2 = &\ \sup_{X\in S}(\|A\cdot BX\|_2)\\
&= \sup_{X\in S}\Big(\frac{\|A\cdot BX\|_2}{\|BX\|_2}\|BX\|_2\Big)\\
&\leq \sup_{Y\in S}(\|AY\|_2)\sup_{X\in S}(\|BX\|_2)\\
&\leq \|\!|A|\!\|_2\|\!|B|\!\|_2.
\end{aligned}$$

4. Soit $U \in \mathcal{O}(n)$.
$$\begin{aligned}
\|\!|MU|\!\|_2 &= \sup_{X\in S}(\|M\cdot UX\|_2)\\
&= \sup_{Y\in S}(\|MY\|_2) = \|\!|M|\!\|_2
\end{aligned}$$
   car $\|UX\|_2 = \|Y\|_2 = 1$
$$\begin{aligned}
\|\!|UM|\!\|_2 &= \sup_{X\in S}(\|U\cdot MX\|_2)\\
&= \sup_{X\in S}(\|MX\|_2) = \|\!|M|\!\|_2
\end{aligned}$$
   car $\|U\cdot MX\|_2 = \|MX\|_2$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et V le vecteur propre unitaire associé. On a alors
$$\|A\|_2 = \sup_{X\in S}(\|AX\|_2) \geq |\lambda|$$

6. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|B\|_2 = r < 1$. Soit $S_N = \sum_{k=0}^{n} B^k$.
   (a) Montrer que S_N est une suite de cauchy dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ munie de la norme $\|\cdot\|_2$.
$$\forall N,\ \forall M,\ N > M, \qquad \|S_N - S_M\|_2 = \|\sum_{k=M+1}^{N} B^k\|_2 \leq \sum_{k=M+1}^{N} \|B\|_2^k$$
   et que $\|B\| < 1$ (une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 est de Cauchy).
   (b) La suite S_N est convergente dans $(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \|\cdot\|)$[1], puisqu'elle est de cauchy. Notons S la limite de S_N.
   (c) Calculer $S_N(I-B)$ et $(I-B)S_N$.
$$S_N(I-B) = \sum_{k=0}^{N} B^k - \sum_{k=0}^{N} B^{k+1} = I - B^{N+1} \tag{1}$$
   De même, on a
$$(I-B)S_N = I - B^{N+1} \tag{2}$$
   (d) On a
$$\|S_N\|_2 \leq \sum_{k=0}^{N} \|B\|_2^k = \frac{1-\|B\|_2^{N+1}}{1-\|B\|_2}$$
   En passant à la limite, lorsque $N \to +\infty$, on obtient
$$S(I-B) = (I-B)S = I$$
   Ainsi, $I - B$ est inversible et
$$(I-B)^{-1} = S = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k$$

7. Si $I - B$ est non inversible, alors 1 est une valeur propre de B, et par suite on a $\|B\|_2 \geq 1$, puisque $\varrho(B) \geq 1$ et d'après la question 5. on a $\|B\|_2 \geq \varrho(B)$.

II - Propriétées des matrices symétriques positives

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive.

1. Puisque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique alors il existe n valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité et une base de vecteurs propres orthonormales et A est diagonalisable avec la diagonale formé par les valeurs propres de A. La matrice P représente la matrice de passage de la base canonique à la base $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$.

[1] $(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

2. Comme A est positive alors les valeurs propres sont positives.

3. Soient $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées suivants l'ordre croissant et $(V_1, \ldots.., V_n)$ les vecteurs propres orthogonaux qui leur sont associés. On pose

$$q_A(X) = (AX, X), \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$$

   (a) On décompose X dans la base $(V_1, \ldots.., V_n)$. $X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$. D'où $AX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i V_i$

$$q_A(X) = (AX, X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \|V_i\|_2^2$$

   Comme $\lambda_i \leq \lambda_n$ on trouve $q_A(X) \leq \lambda_n \|X\|_2^2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Comme $\lambda_i \geq \lambda_1$ on trouve $q_A(X) \geq \lambda_1 \|X\|_2^2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

   (c) Comme $\|X\|_2^2 = 1$ sur S ca implique $\lambda_1 \leq q_A(X) \leq \lambda_n$ sur S.

   (d) Si $AX = \lambda_n X$ alors $(AX, X) = \lambda_n \|X\|_2^2$. Si $(AX, X) = \lambda_n \|X\|_2^2$ comme $(AX, X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \|V_i\|_2^2 = \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|V_i\|_2^2$. D'où $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_n - \lambda_i) x_i^2 \|V_i\|_2^2 = 0$. Comme $(\lambda_n - \lambda_i) \geq 0$ ca implique $x_i = 0$ pour $i \neq n$. . D'où $AX = \lambda_n X$.

   (e) Si $X = V_n$ on trouve $q_A(V_n) = \lambda_n \|V_n\|_2^2$ et si $X = V_1$ on trouve $q_A(V_1) = \lambda_1 \|V_1\|_2^2$ d'où $\inf_{X \in S} q_A(X) = \lambda_1$ et $\sup_{X \in S} q_A(X) = \lambda_n$.

4. On décompose X dans la base $(V_1, \ldots.., V_n)$. $X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$. D'où $\|AX\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \|V_i\|_2^2$ d'où $\|A\|_2 \leq \lambda_n$ et comme $\|A\|_2 \geq \lambda_n$ on trouve $\|A\|_2 = \lambda_n$.

5. (a) (a) $\Longrightarrow$ (b) Cette implication est immédiate puisque l'on a

$$\|A^k v\|_2 \leq \|A^k\|_2 \|v\|_2$$

   pour tout v dans $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$.

   (b) (b) $\Longrightarrow$ (c) Montrons cette implication par l'absurde. Supposons que $\rho(A) \geq 1$, cela entraine qu'ils existent $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| \geq 1$ et $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pour lesquels on a

$$Ap = \lambda p$$

   d'où

$$\|A^k p\|_2 = |\lambda|^k \|p\|_2 \geq \|p\|_2 > 0$$

   par conséquent

$$\lim_{k \to +\infty} \|A^k p\|_2 \neq 0$$

   et la propriété ii) ne serait pas vérifiée.

   (c) (c) $\Longrightarrow$ (d)) trivial

   (d) (d)$\Longrightarrow$ (a)

   On a

$$0 \leq \|A^k\|_2 \leq \|A\|_2^k$$

   On en déduit puisque $\|A\|_2 < 1$, que

$$\lim_{k \to +\infty} \|A^k\|_2 = 0$$

   c'est-à-dire A^k que tend vers 0, quand k tend vers $+\infty$.

6. Soit $\gamma \in \mathbb{R}^+$ et $B(\gamma) = I - \gamma A$.

   (a) les valeurs propres de $B(\gamma)$ sont $\mu_i(\gamma) = 1 - \gamma\lambda_i$ de $1 \le i \le n$, en fonction de γ et des $\lambda_i, 1 \le i \le n$.

   (b) On définit
   $$f_i(\gamma) = |1 - \gamma\lambda_i|, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^+$$
   et
   $$f(\gamma) = \max_{1\le i\le n}(f_i(\gamma), \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^+$$

      i. on a $\lambda_1 \le \lambda_i \le \lambda_n$. d'où $1 - \gamma\lambda_n \le 1 - \gamma\lambda_i \le 1 - \gamma\lambda_1$. Donc si $0 \le 1 - \gamma\lambda_i \le 1 - \gamma\lambda_1$ sinon $1 - \gamma\lambda_n \le 1 - \gamma\lambda_i \le 0$ d'où $0 \le |1 - \gamma\lambda_i| \le |1 - \gamma\lambda_n|$ Donc $f(\gamma) = \max(f_1(\gamma), f_n(\gamma))$.

      ii. Soit D_1 la courbe d'équation $y_1(\gamma) = |1 - \gamma\lambda_1|$ et D_2 la courbe d'équation $y_2(\gamma) = |1 - \gamma\lambda_n|$ donc $f(\gamma) = \max(y_1(\gamma), y_2(\gamma))$ d'où γ^* est telle que $y_1(\gamma^*) = y_2(\gamma^*)$. Donc $\gamma^* > 0$ tel que
      $$f(\gamma) = \begin{cases} f_1(\gamma) & \text{si} \quad 0 \le \gamma \le \gamma^*, \\ f_n(\gamma) & \text{si} \quad \gamma^* \le \gamma \end{cases}$$

      iii. Comme $\frac{1}{\lambda_n} \le \gamma^* \le \frac{1}{\lambda_1}$ on a $y_1(\gamma) = 1 - \gamma\lambda_1$ et $y_2(\gamma) = \gamma\lambda_n - 1$. D'où $1 - \gamma^*\lambda_1 = \gamma^*\lambda_n - 1$. On trouve $\gamma^* = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$.

   (c) En déduire que
   $$\rho(B(\gamma)) = \begin{cases} 1 - \lambda_1\gamma & \text{si} \quad 0 \le \gamma \le \gamma^*, \\ \lambda_n\gamma - 1 & \text{si} \quad \gamma \ge \gamma^*. \end{cases}$$

   (d) $\rho(B(\gamma))$ est décroissante sur $[0, \gamma^*]$ puis croissante sur $[\gamma^*, +\infty[$. Donc $\rho(B(\gamma))$ atteint son minimum en γ^* et On a:
   $$\rho(\gamma^*) = \min_{\gamma>0} \rho(B(\gamma)) = 1 - \gamma^*\lambda_1 = 1 - \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}\lambda_1 = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}.$$

III - Valeurs singulières d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. ${}^t({}^tAA) = {}^tA({}^t({}^tA)) = {}^tAA$ est une matrice symétrique. $(tAAX, X) = (AX, AX) = \|AX\|_2^2 \ge 0$. D'où ${}^tAA$ est positive.

2. D'après la partie II, Comme ${}^tAA$ est symétrique il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice D une matrice diagonale telles que
   $${}^tAA = {}^tPDP$$
   avec $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et où les λ_i sont les valeurs propres de ${}^tAA$. On appelle valeurs singulières de A le nombre $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

3. On a
$$\|AX\|_2^2 = (AX, AX) = (tAAX, X) = q_{{}^tAA}(X)$$
d'où
$$\sigma_{max} = \sup_{X\in S}(\|AX\|_2) = \sup_{X\in S}(\sqrt{q_{{}^tAA}(X)}) = \sqrt{\lambda_n}$$
de même pour
$$\sigma_{min} = \inf_{X\in S}(\|AX\|_2) = \sqrt{\lambda_1}$$
où $\sigma_{max} = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sigma_i$ et $\sigma_{min} = \min\limits_{1\leq i\leq n} \sigma_i$.

IV Convergence d'une méthode itérative

Soit $\alpha > 0$ un nombre réel et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère le système linéaire :
$$\begin{pmatrix} I & A \\ {}^tA & -\alpha I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

1. Si le vecteur $(Z, X) \in \mathbb{R}^{2n}$ est solution du système (3) alors
$$\begin{cases} Z + AX = b \\ {}^tAZ - \alpha X = 0 \end{cases}$$
La première équation nous donne
$$Z = -AX + b$$
En remplacant dans la deuxième équation nous trouvons:
$${}^tA(-AX + b) - \alpha X = 0$$
D'où le vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ est solution de
$$({}^tAA + \alpha I)x =^t Ab \tag{4}$$

2. Comme la matrice ${}^tAA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive alors la matrice $({}^tAA + \alpha I)$ est symétrique définies positive donc inversible. D'où il existe un unique $X \in \mathbb{R}^n$ solution de (4). D'où $Z = -AX + b$ est unique.

3. Puisque le système (3) admet une solution unique ca implique que la matrice du système (3) est inversible.

4. Soit $\gamma \in \mathbb{R}^*$ et soit la matrice $B(\gamma) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$B(\gamma) = I - \gamma({}^tAA + \alpha I)$$
   (a) Si $({}^tAA + \alpha I)X =^t Ab$ alors en multipliant cette équation par γ et en retranchant X des deux côtés on trouve $X - \gamma({}^tAA + \alpha I)X = X - \gamma^t Ab$ alors $X = B(\gamma)X + \gamma\, {}^tAb$. De même pour l'autre sens.

   (b) Soit la méthode itérative:
$$\begin{cases} X^0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{quelconque,} \\ X^{k+1} = B(\gamma)X^k + \gamma\, {}^tAb. \end{cases} \tag{3.1}$$

i. Si la suite $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers X^*

$$X^* = B(\gamma)X^* + \gamma\, {}^tAb$$

d'après le 4.a) X^* est solution du système (4)

ii. Supposons que $\rho(B(\gamma)) < 1$. On a

$$B(\gamma) = I - \gamma({}^tAA + \alpha I) = {}^t P(I - \gamma(D+\alpha))P$$

où $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ avec les λ_i sont les valeurs propres de ${}^tAA$. En utilisant le I.4 on obtient

$$\|B(\gamma)\|_2 = \|(I - \gamma(D+\alpha)\|_2 = \max_{1\le i\le n} |I - \gamma(\lambda_i + \alpha)| = \rho(B(\gamma))$$

d'où $\|B(\gamma)\|_2 < 1$. Pour tout entier $k \ge 1$, on a:

$$X^k - X^* = B(\gamma)X^k + \gamma\, {}^tAb - (B(\gamma)X^* + \gamma\, {}^tAb) = B(\gamma)(X^{k-1} - X^*)$$

d'où

$$X^k - X^* = B(\gamma)(X^{k-1} - X^*) = ... = B(\gamma)^k(X^0 - X^*)$$

$$\|X^k - X^*\|_2 \le \|B(\gamma))^k\|_2 \|X^0 - X^*\|_2.$$

Comme $\|B(\gamma)\|_2 < 1$, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} (X^k - X^*) = 0$$

pour tout choix $X^0 \in \mathbb{R}^n$. Réciproquement, si la suite (X^k) converge pour tout choix X^0 vers X^* solution de(4) , le même raisonnement entraine que

$$\forall X^0 \in \mathbb{R}^n \qquad \lim_{k\to+\infty} B^k(\gamma)(X^0 - X^*) = 0$$

autrement dit

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \qquad \lim_{k\to+\infty} B^k(\gamma)v = 0$$

On en déduit en utilisant le même raisonnement que II .5 que $\rho(B(\gamma)) < 1$.

iii. Donner les valeurs de γ en fonction de α et les valeurs singulières de A pour que la méthode itérative (4) soit convergente.

A. Si $\gamma < 0$ alors $\rho(B(\gamma)) > 1$. D'où, d'après la question précédente, la méthode est divergence .

B. On a

$$\rho(B(\gamma)) \begin{cases} 1 - (\sigma_{min}^2 + \alpha)\gamma & \text{si} \quad 0 < \gamma \le \gamma^*, \\ (\sigma_{max}^2 + \alpha)\gamma - 1 & \text{si} \quad \gamma \ge \gamma^*. \end{cases}$$

avec $\gamma^* = \frac{2}{\sigma_{min}^2 + \sigma_{max}^2 + 2\alpha}$. Comme $\rho(B(\gamma)) < 1$ on doit avoir

$$1 - (\sigma_{min}^2 + \alpha)\gamma < 1$$

qui est vérifié si $\gamma \ge 0$.

$$(\sigma_{max}^2 + \alpha)\gamma - 1 < 1$$

d'où

$$\gamma < \frac{2}{(\sigma_{max}^2 + \alpha)}$$

Donc $\gamma \in]0, \frac{2}{(\sigma_{max}^2+\alpha)}[$

iv. γ^* qui minimise $\rho(B(\gamma))$ est $\gamma^* = \frac{2}{\sigma_{min}^2 + \sigma_{max}^2 + 2\alpha}$.

Fin de l'épreuve