REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2011

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2011

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques II

Date: Samedi 18 Juin 2011	**Heure: 8H**	**Durée: 3H**	**Nbre pages: 5**
Barème: Partie I: A: 4 pts, B: 7 pts; Partie II: A: 4,5 pts, B: 4,5 pts			

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

Dans tout le problème $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on adopte les notations suivantes:

- $\mathbb{K}[X]$: l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes.
- Lorsque $n = p$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- I_n représente la matrice identité d'ordre n.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note ${}^tA$ sa matrice transposée.
- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.
- $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E.
- $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E.
- id_E représente l'endomorphisme identité de E.
- L'image, le noyau, la trace et le polynôme caractéristique de $f \in \mathcal{L}(E)$ sont respectivement notés $\mathrm{Im}(f)$, $\ker(f)$, $\mathrm{Tr}(f)$ et $P_f(t) = \mathrm{dét}(f - t\,\mathrm{id}_E)$.
- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f dans $\mathbb{K}$.
- Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$, le sous-espace propre de f associé à λ est noté $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.

PARTIE I

Soient u et v deux endomorphismes de E et soient $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ leurs matrices respectives dans une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. On définit deux endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ par :

$$G_u(f) = u \circ f \quad \text{et} \quad D_v(f) = f \circ v \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{L}(E).$$

A - Etude des endomorphismes G_u, D_v et $G_u + D_v$

Dans toute cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour simplifier, on note

$$\Theta_{u,v} = G_u + D_v : f \longmapsto u \circ f + f \circ v.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $R \in \mathbb{C}[X]$, on a $R(G_u) = G_{R(u)}$.
   (b) En déduire que $R(u) = 0$ si et seulement si $R(G_u) = 0$.
   (c) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si G_u est diagonalisable.
2. Montrer d'une façon analogue que v est diagonalisable si et seulement si D_v est diagonalisable.
3. Dans cette question, on suppose que u et v sont diagonalisables.
   (a) Montrer que $G_u \circ D_v = D_v \circ G_u$.
   (b) Montrer que tout sous-espace propre de G_u est stable par D_v.
   (c) Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée par des vecteurs propres communs à G_u et D_v.
   (d) En déduire que $\Theta_{u,v}$ est diagonalisable.
4. On suppose que u est diagonalisable.
   (a) Montrer que $v \in \ker(\Theta_{u,-u})$ si et seulement si tout sous-espace propre de u est stable par v.
   (b) En déduire que la dimension de $\ker(\Theta_{u,-u})$ est égale à la somme des carrées des dimensions des sous-espaces propres de u.
   (c) On suppose que u admet n valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ distinctes deux à deux. Pour $v \in \ker(\Theta_{u,-u})$, montrer que :
      i. pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$ et pour tout vecteur propre x_j de u associé à λ_j, il existe $\mu_j \in \mathbb{C}$ tel que $v(x_j) = \mu_j x_j$. En déduire que v est diagonalisable.
      ii. il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $v = R(u)$. (On pourra utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$).

B - Cas où $\dim(E) = 2$

On reprend le cas général $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on suppose que $\dim(E) = 2$. Soit u un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie. On se propose d'étudier la diagonalisabilité de u et $\Theta_{u,-u}$ selon $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon_1 \in E$ tel que $\mathcal{U} = (\varepsilon_1, u(\varepsilon_1))$ est libre. (On notera $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$).

(b) En déduire que $\ker(\Theta_{u,-u}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u)$.

2. Pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, on définit l'endomorphisme de E, noté f_{ij}, par :

$$f_{ij}(\varepsilon_k) = \delta_{jk}\varepsilon_i, \quad \forall k \in \{1,2\},$$

où

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{F} = (f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

3. (a) Vérifier que la matrice de u dans la base $\mathcal{U}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$.

   (b) Déterminer la matrice de $\Theta_{u,-u}$ dans la base $\mathcal{F} = (f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22})$ en fonction de γ et δ.

   (c) En déduire que $\mathrm{Tr}(\Theta_{u,-u}) = 0$.

4. Montrer que le polynôme caractéristique de $\Theta_{u,-u}$ est donné par $P_{\Theta_{u,-u}}(t) = t^2(t^2+\beta)$ avec $\beta \in \mathbb{K}$.

5. Si $\beta = 0$, l'endomorphisme $\Theta_{u,-u}$ est-il diagonalisable?

6. On suppose que $\beta \neq 0$. Etudier la diagonalisabilité de $\Theta_{u,-u}$ selon $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

7. On suppose que $\Theta_{u,-u}$ est diagonalisable.

   (a) Vérifier que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\Theta_{u,-u}) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ où λ est un scalaire non nul.
   Dans la suite de cette question, w_1 (respectivement w_2) désigne un vecteur propre de $\Theta_{u,-u}$ associé à la valeur propre λ (respectivement $-\lambda$).

   (b) i. Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{K}$, $w_1 \circ (u - t\,\mathrm{id}_E) = (u - (t+\lambda)\,\mathrm{id}_E) \circ w_1$.
   ii. Montrer que $rg(w_1) = 1$, $\mathrm{Tr}(w_1) = 0$ et $w_1^2 = 0$.
   Remarquons qu'on a les même résultats pour w_2.

   (c) i. Montrer que la famille $(\varepsilon_1, w_1(\varepsilon_1))$ est une base de E.
   ii. Vérifier que la matrice de u dans une telle base est triangulaire inférieure.
   iii. En déduire que

   $$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \left\{\frac{\mathrm{Tr}(u) - \lambda}{2}, \frac{\mathrm{Tr}(u) + \lambda}{2}\right\}.$$

   Que peut-on alors dire de u?

   (d) i. Montrer que $w_1 \circ w_2(\varepsilon_1) \neq 0$ et $w_2 \circ w_1(\varepsilon_1) \neq 0$.
   ii. Montrer que $E = \ker(w_1) \oplus \ker(w_2)$.
   iii. En déduire une base de E formée par des vecteurs propres de u.

PARTIE II

Dans cette deuxième partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini par $(X|Y) = {}^tXY$ pour $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on notera la norme associée par $|\cdot|$.
- Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite "positive" (respectivement "définie positive") si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geqslant 0$ (respectivement, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, ${}^tXMX > 0$).

A - Etude de Φ_A dans une structure euclidienne

On rappelle que A désigne la matrice de u dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. Matriciellement, l'endomorphisme $\Theta_{u,u}$ induit l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée Φ_A, défini par :

$$\begin{array}{rcl} \Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM + MA. \end{array}$$

1. Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : (M, N) \longmapsto \dfrac{1}{n}\mathrm{Tr}(M^tN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.
2. On suppose que A est symétrique. Montrer que Φ_A est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$.
3. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que C est définie positive si et seulement si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \subset \mathbb{R}_+^*$.

   Dans la suite de cette partie, $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive.
4. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = Q^2$.
5. En déduire que l'endomorphisme autoadjoint Φ_S est défini positif.
6. Soient α une valeur propre de Φ_S et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, $S^kM = M(\alpha I_n - S)^k$.
   (b) En déduire que, pour tout $R \in \mathbb{R}[X]$, $R(S)M = MR(\alpha I_n - S)$.
   (c) i. Vérifier que $MP_S(\alpha I_n - S) = 0$ et en déduire que la matrice $P_S(\alpha I_n - S)$ n'est pas inversible.
   ii. En déduire qu'il existe $\beta \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$ tel que $(\alpha - \beta) I_n - S$ ne soit pas inversible.
   (d) Retrouver le résultat de la question 5.
7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est symétrique si et seulement si $\Phi_S(M)$ l'est aussi.
8. Soit $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que C est définie positive si et seulement si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.
   (b) On suppose que C est symétrique et définie positive et on considère une matrice $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 0$.
   i. Calculer $\Phi_C(M_\lambda)$.
   ii. Montrer qu'on peut trouver des valeurs de b et λ pour lesquelles cette matrice ne soit pas définie positive.

B - Orthogonalité dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$

Dans cette partie, on suppose que $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont définies par:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{si non;} \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 1 & si\, j = i-1 \\ 1 & \text{si } i = 1, j = n \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

1. (a) Calculer A^p, pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (b) Vérifier que $B^p = A^p + {}^t(A^{n-p})$, pour tout entier naturel $p \leqslant n-1$ et que $B^n = I_n$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $p \in \mathbb{N}$, B^p est une matrice orthogonale.
3. Soient $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$ les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendrés respectivement par $\{I_n, A, \cdots, A^p, \cdots\}$ et $\{I_n, B, \cdots, B^p, \cdots\}$.
   (a) Quelles sont leurs dimensions?
   (b) Quelle est leur intersection?
4. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^p est-elle inversible? diagonalisable?
5. Pour $p, q \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, calculer $\langle A^p, A^q\rangle$.
   (Indication: on pourra vérifier que, pour $0 \leqslant p \leqslant n-1$, on a $A^p = \sum_{j=1}^{n-p} E_{p+j,j}$, où $E_{i,j} = (d_{\ell m}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients tous nul sauf $d_{ij} = 1$).
6. En déduire une base orthonormée de $\mathcal{E}_A$.
7. Montrer que $\{I_n, B, \cdots, B^{n-1}\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}_B$.
8. Pour $p, q \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, exprimer $\langle A^p, B^q\rangle$ en fonction de $\langle A^i, A^j\rangle$.
9. On fixe $p \in \{0, \cdots, n-1\}$. Pour $C \in \mathcal{E}_A$, montrer que $B^p - C$ est dans l'orthogonal de $\mathcal{E}_A$ si et seulement si $C = A^p$.