REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2012

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2012

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Date: 4 Juin 2012	**Heure:** 8 H	**Durée:** 4 heures	**Nb pages:** 5
Barème : **Partie I:** 6 pts	**Partie II:** 6 pts	**Partie III:** 4 pts	**Partie IV:** 4 pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Rappels et Notations
Soit f une fonction 2π périodique continue par morçeaux. Les coefficients de Fourier exponentiels de f sont définis par

$$C_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt, \quad k \in \mathbb{C}.$$

Les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont définis par

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt,$$
$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$
$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Partie I

1. Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $H(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$, pour tout $t \in]0, 2\pi[$ et $H(0) = 0$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(H) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(H) = \frac{1}{n}$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{x - e^{it}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)it}.$$

3. En déduire que

$$\frac{x-\cos t}{x^2-2x\cos t+1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos((n+1)t).$$

4. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \left]-1,1\right[$,

$$\ln(x^2-2x\cos t+1) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\cos(nt).$$

5. Soient $x \in \left]-1,1\right[$. On considère l'application

$$G_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto -\tfrac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos t+1).$$

   (a) Montrer que G_x est continue, 2π-périodique et paire.

   (b) Montrer que $a_0(G_x) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(G_x) = \frac{x^n}{n} \text{ et } b_n(G_x) = 0.$$

   (c) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \left(\ln(x^2-2x\cos t+1)\right)^2 dt = 4\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}.$$

6. Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

7. Soient $(t,x) \in \left]0,\pi\right[\times \left]-1,1\right[$. Montrer que

$$\cos^2(\tfrac{t}{2}) \le \frac{x^2-2x\cos t+1}{2-2\cos t} \le \frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})}.$$

8. En déduire que

$$\left|\ln\left(\frac{x^2-2x\cos t+1}{2-2\cos t}\right)\right| \le 2\left|\ln\left(\frac{1}{2}\sin(t)\right)\right|.$$

9. Soit

$$G : \left]0,2\pi\right[\to \mathbb{R}, t \mapsto -\tfrac{1}{2}\ln(2-2\cos t) = -\ln\left(2\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\right).$$

   (a) Montrer que G est de carré intégrable sur $\left]0,2\pi\right[$ et que

$$\lim_{x\to 1^-}\int_0^{2\pi} |G_x(t) - G(t)|^2\, dt = 0.$$

   (b) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} \left|\ln\left(2\sin\tfrac{t}{2}\right)\right|^2 dt = \frac{\pi^3}{6}.$$

Partie II

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation fonctionnelle

$$\forall t \in \mathbb{R} : g(t) = \sum_{k=0}^{p-1} g\left(\tfrac{t+2k\pi}{p}\right), \qquad (E_p)$$

d'inconnue $g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \geq 2$. Montrer que l'application nulle est la seule solution constante de E_p.

2. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto \widetilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{p-1} f\left(t + \frac{2k\pi}{p}\right)$$

et

$$f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto f_p(t) = f(pt).$$

(a) Montrer que $\widetilde{f}$ et f_p sont continues et 2π-périodiques.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_{np}\left(\widetilde{f}\right) = p c_{np}(f) \text{ et } c_{np}(f_p) = c_n(f).$$

3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application de classe C^1, 2π-périodique. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \geq 2$ tel que g soit solution de (E_p).

(a) Montrer que $g' \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(pt) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} g'\left(t + \tfrac{2k\pi}{p}\right).$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(g') = c_{pn}(g').$$

(c) Calculer $c_0(g')$.

(d) Soit $n \in \mathbb{Z}$ non nul.

i. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$c_n(g') = c_{np^r}(g').$$

ii. En déduire que $c_n(g') = 0$.

(e) Montrer alors que g' est nulle.

(f) En déduire que g est nulle.

4. Soit

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n t)}{2^{n+1}}.$$

(a) Montrer que g définit une application continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = g\left(\tfrac{t}{2}\right) + g\left(\tfrac{t+2\pi}{2}\right).$$

(c) Calculer $g(0)$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

(d) En déduire que g n'est pas constante.

(e) Que peut on conclure ?

Partie III

Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. On suppose que g est solution de E_p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 2$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
   $$c_n(g) = pc_{pn}(g).$$

   (b) En déduire que

   i. $c_0(g) = 0,\ c_p(g) = \frac{c_1(g)}{p}$, et $c_{-p}(g) = \frac{c_{-1}(g)}{p}$.

   ii. $a_0(g) = 0,\ a_p(g) = \frac{\alpha}{p}$, et $b_p(g) = \frac{\beta}{p}$. avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2. Montrer que
$$\int_0^{2\pi} |g(t) - \alpha G_x(t) - \beta H(t)|^2\,dt = \frac{|\alpha|^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x^n)^2}{n^2}.$$

3. Montrer que
$$\lim_{x \to 1^-}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-x^n)^2}{n^2} = 0.$$

4. Montrer que
$$\lim_{x \to 1^-}\int_0^{2\pi} |g(t) - \alpha G_x(t) - \beta H(t)|^2\,dt = \int_0^{2\pi} |g(t) - \alpha G(t) - \beta H(t)|^2\,dt.$$

5. En déduire que
$$\int_0^{2\pi} |g(t) - \alpha G(t) - \beta H(t)|^2\,dt = 0.$$

6. Montrer que, pour tout $t \in]0, 2\pi[$,
$$g(t) = \alpha G(t) + \beta H(t).$$

7. En déduire que $g = \widetilde{0}$.

Partie IV

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$\Gamma_n : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n^x n!}{x(x+1)\,..\,(x+n)}$$

et
$$f_n : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(\Gamma_{n+1}(x)) - \ln(\Gamma_n(x)).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$,
$$f_n(x) = -x\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right).$$

2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que sa somme est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$.

3. En déduire que la suite de fonctions $(\Gamma_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{*+}$ vers une fonction de classe C^1 qu'on notera Γ.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\Gamma_n(x+1) = \frac{nx}{n+1+x}\Gamma_n(x).$$

   (b) En déduire que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\Gamma_n\left(\tfrac{x}{2}\right)\Gamma_n\left(\tfrac{x+1}{2}\right) = \frac{2^{2n+2}(n!)^2\sqrt{n}}{2^x(2n)!(x+2n+1)}\Gamma_{2n}(x).$$

   (b) En déduire que
$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\tfrac{x}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{x+1}{2}\right).$$

   IND. : On pourra utiliser la formule de Stirling $n! \sim \left(\sqrt{2\pi n}\right)e^{-n}n^n$.

On pourra montrer de manière analogue, et on l'admettra ici, que si $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$
$$\Gamma(x) = \frac{p^{\frac{2x-1}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{p-1}}\prod_{k=0}^{p-1}\Gamma\left(\tfrac{x+k}{p}\right).$$

6. Soit $\Lambda : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}^{*+}$ une application continue telle que

   ⊛ Pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$,
$$\Lambda(x+1) = x\Lambda(x).$$

   ⊛ Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$,
$$\Lambda(x) = \frac{p^{\frac{2x-1}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{p-1}}\prod_{k=0}^{p-1}\Lambda\left(\tfrac{x+k}{p}\right).$$

   On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que, pour tout $x \in [2\pi, 4\pi]$,
$$g(x) = \ln\left(\Gamma\left(\tfrac{x}{2\pi}\right)\right) - \ln\left(\Lambda\left(\tfrac{x}{2\pi}\right)\right).$$

   (a) Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$g(x) = \ln\left(\Gamma\left(\tfrac{x}{2\pi}\right)\right) - \ln\left(\Lambda\left(\tfrac{x}{2\pi}\right)\right).$$

   (b) Montrer que g est solution de l'équation fonctionnelle (E_p) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

   (c) En déduire que $\Lambda = \Gamma$.

• • • Fin • • •