Concours en Physique et Chimie

**Exercice**

**1)**

**1-a)**

$a_{n+1} - a_n = -a_n^2 \leq 0$, la suite est décroissante.
on a $0 < a_0 < 1$. Supposons que $0 < a_n < 1$, on a alors $0 < 1 - a_n < 1$ et $0 < a_n(1 - a_n) = a_{n+1} < 1$. Ainsi pour tout $n \geq 0$, $0 < a_n < 1$.

**1-b)**

$(a_n)$ est décroissante minorée par 0 donc convergente. Sa limite $l$ vérifie $l = l - l^2$ donc $l = 0$.

**2)**

**2-a)**

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k - a_{k+1} = a_0 - a_{n+1} \longrightarrow a_0.$$

La série $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ est alors convergente, et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = a_0$.

**2-b)**

$$\log(a_{n+1}) = \log(a_n - a_n^2) = \log(a_n) + \log(1 - a_n) \Longrightarrow$$

$$\forall n \geq 0, \log(1 - a_n) = \log(a_{n+1}) - \log(a_n).$$

$\sum_{k=0}^{n} \log(1 - a_k) = \sum_{k=0}^{n} \log(a_{k+1}) - \log(a_k) = \log(a_{n+1}) - \log(a_0) \longrightarrow -\infty$,
la série $\sum_{n\geq 0} \log(1 - a_n)$ est alors divergente.
D'autre part $\log(1 - a_n) \sim -a_n$, donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est divergente.

**3)**

$\forall x \in I\!R$, $|\frac{a_n}{n!}e^{-x}x^n| \leq e^{-x}\frac{|x|^n}{n!}$ qui est le terme général d'une série convergente, d'où $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!}e^{-x}x^n$ converge absolument pour tout $x$ réel.

**4)**

La suite $(a_n)$ étant décroissante et $x \geq 0$, on a alors :

$$0 \leq G(x) - G_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n \leq a_{N+1} e^{-x} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \leq a_{N+1}.$$

En déduire que $\sup_{x \in [0,+\infty[} |G(x) - G_N(x)| \leq a_{N+1} \longrightarrow_{N \longrightarrow \infty} 0$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n$ C.U. sur $[0, 1]$.
On a en plus $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
T.D.L. montre que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} G(x) = 0$.

**5)**

On a $\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^2 e^{(s-1)t} = 0$ et $\lim_{t \longrightarrow +\infty} G(st) = 0$ d'où $\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^2 e^{(s-1)t} G(st) = 0$.
En plus le théorème de continuité montre que $G$ est continue sur $[0, +\infty[$.
D'où l'application $t \longrightarrow e^{(s-1)t} G(st)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

**6)**

$$\int_0^{+\infty} e^{(s-1)t} G(st) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} e^{-t} s^n t^n dt$$

Le théorème de permutation série intégrale donne alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{(s-1)t} G(st) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} s^n \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n.$$

## Problème

### Partie 1 13

**1)**

L'égalité $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$ donne :

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2\cos(\varphi(x)) f_n(x).$$

**2)**

L'égalité $\cos((m+n)\theta) + \cos((m-n)\theta) = 2\cos(m\theta)\cos(n\theta)$ fournit la relation :

$$f_{m+n}(x) + f_{m-n}(x) = 2 f_m(x) f_n(x).$$

**3)**

Pour tout $x \in [-1,1]$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$ et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$,
ù :

$$e^{in\arccos(x)} = (x + i\sqrt{1-x^2})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k (\sqrt{1-x^2})^k x^{n-k}.$$

**4)**

$$(x) = R\acute{e}(e^{in\arccos(x)}) = R\acute{e}(\sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k (\sqrt{1-x^2})^k x^{n-k}) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k}(x^2-1)^k x^{n-2k}.$$

**5)**

$T_n$ est un polynôme de degré $n$ qui possède la parité de $n$.

## Partie 2

**1)**

La question 1) de la partie I donne :

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

$x) = \cos(0) = 1$, et $T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$.

**2)**

$$(M_n - xI_n)V_n(x) = \begin{pmatrix} -xT_0(x) + T_1(x) \\ \frac{1}{2}T_0(x) - xT_1(x) + \frac{1}{2}T_2(x) \\ \frac{1}{2}T_1(x) - xT_2(x) + \frac{1}{2}T_3(x) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}T_{n-3}(x) - xT_{n-2}(x) + \frac{1}{2}T_{n-1}(x) \\ \frac{1}{2}T_{n-2}(x) - xT_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2}T_n(x) \end{pmatrix}$$

**3)**

$T_n(x_{k,n}) = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0, \Longrightarrow x_{k,n}$ est une racine de $T_n$.
$(x_{k,n})_{0\le k\le n-1}$ forment $n$ racines deux à deux distinctes du polynôme $T_n$ de
ré $n$, ça fournit donc toutes les racines de $T_n$.

**4)**

$$(M_n - x_{k,n} I_n) V_n(x_{k,n}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2} T_n(x_{k,n}) \end{pmatrix} = o.$$

**5)**

Pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $V_n(x_{k,n}) \neq 0$. Les $(x_{k,n})_{0 \leq k \leq n-1}$ forment alors $n$ aleurs propres de la matrice $M_n$, ça fournit donc toutes les valeurs propres de $M_n$.
$V_n(x_{k,n})$ est le vecteur propre associé à la valeur propre $x_{k,n}$.

**6)**

La matrice $M_n$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes, donc diagonalisable.

## Partie 3

**1)**

On fait le changement de variable $\theta = \arccos(x)$ on obtient :

$$< f, g > \ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos(\theta)) g(\cos(\theta)) d\theta \ .$$

**2)**

Pour $m \neq n$,

$$< T_m, T_n > \ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} T_m(\cos(\theta)) T_n(\cos(\theta)) d\theta \ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta) d\theta \ = 0.$$

Pour $n \geq 1$,

$$< T_n, T_n > \ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} T_n(\cos(\theta)) T_n(\cos(\theta)) d\theta \ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(n\theta))^2 d\theta \ = 1.$$

Pour $n = 0$,

$$< T_0, T_0 > = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 d\theta \ = 2.$$

## 3)

$(T_0, T_1, ..., T_n)$ forme une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ deux à deux orthogonaux, donc c'est une base.

## 4)

$$a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(\theta)\cos(n\theta)d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos(\theta))T_n(\cos(\theta))d\theta = < f, T_n > .$$

## 5)

$$\frac{1}{2}a_0(g)+\sum_{n=1}^{N} a_n(g)\cos(n\theta) = \frac{1}{2} < f, T_0 > + \sum_{n=1}^{N} < f, T_n > T_n(\cos(\theta)) = S_N(f)(\cos(\theta))$$

## 6)

Si $f$ est continue et $C^1$ par morceaux sur $[-1,1]$, il en est de même de $g : \theta \longrightarrow f(\cos(\theta))$ sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que la série de Fourier de $g$ converge normalement vers $g$ sur $\mathbb{R}$, ce qui entraine la convergence absolue de $\sum_{n\geq 1} a_n(g)$.
D'autre part , $| < f, T_n > T_n(x)| \leq | < f, T_n > | = |a_n(g)|$.
Il s'ensuit que la série $\sum_{n\geq 1} < f, T_n > T_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.
Enfin on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)\cos(n\theta) = g(\theta) = f(\cos(\theta))$$

donc pour tout $x \in [-1,1]$, en posant $x = \cos(\theta)$, on obtient :

$$\frac{1}{2} < f, T_0 > + \sum_{n=1}^{+\infty} < f, T_n > T_n(x) = f(x).$$

## 7)

### 7-a)

On a

$$\sup_{x\in[-1,1]} |\alpha_n T_n(x)| \leq |\alpha_n|$$

La série $\sum_{n\geq 1} |\alpha_n|$ est convergente donc la série $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n T_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.

**7-b)**

Soit $f = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n T_n$ Pour tout entier $n$ :

$$< f, T_n >= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} (\frac{\alpha_0}{2} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \frac{T_k(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}})dx$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} < T_0, T_n > + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \frac{T_k(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

On pose $h_k(x) = \alpha_k \frac{T_k(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
$h_k$ est intégrable sur $]-1, 1[$.
$\sum_{k\geq 1} h_k$ converge simplement sur $]-1, 1[$.
$\sum_{k=1}^{+\infty} h_k$ est continue sur $]-1, 1[$.
$\int_{-1}^{1} |h_k(x)|dx \leq \pi|\alpha_k|$. La série $\sum_{k\geq 1} \int_{-1}^{1} |h_k(x)|dx$ est alors convergente.
Le théorème de permutation somme intégrale donne alors :

$$< f, T_n >= \frac{\alpha_0}{2} < T_0, T_n > + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k < T_k, T_n >= \alpha_n$$

## Partie 4

**1)**

**1-a)**

**1-b)**

$\forall n \in I\!N$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \theta \cos(n\theta) d\theta$.
On trouve $a_0 = \pi$ et pour tout entier $n \geq 1$ :

$$a_n = \frac{2}{\pi}[\frac{\theta}{\pi} \sin(n\theta)]_0^\pi - \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi n^2}[\cos(n\theta)]_0^\pi.$$

$n$ est pair alors $a_n = 0$. Si $n$ est impair alors $a_n = -\dfrac{4}{\pi n^2}$.
nsi la série de Fourier de $h$ est donnée par :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\theta).$$

**1-c)**

L'application $h$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $C^1$ par morceaux . Sa série Fourier converge donc normalement sue $\mathbb{R}$, et a pour somme $h$.

**1-d)**

Ainsi pour tout $\theta \in [0, \pi]$,

$$h(\theta) = \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\theta).$$

**2)**

On pose $k(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$.
;st continue sur $[-1, 1]$ dérivable sur $]-1, 1[$ et $\forall x \in ]-1, 1[$, $k'(x) = 0$ donc ;st constante sur $[-1, 1]$.
ısi $\forall x \in [-1, 1], k(x) = k(0) = \frac{\pi}{2}$

**3)**

$\forall x \in [-1, 1], \theta = \arccos(x) \in [0, \pi] \Longrightarrow$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\arccos(x))$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} T_{2n+1}(x)$$

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} T_{2n+1}(x).$$

**4)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}, T_n(1) = 1$ donc

$$\arcsin(1) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

La valeur de $< \arccos(x), T_n >$, découle à partir du développement de la fonction $\arccos(x)$ donné à la question 3) de la partie 4 et de l'unicité du développement démontré à la question 7) de la partie 3).

**6)**

D'après le développement de la fonction $\arcsin(x)$ donné à la question 3), on obtient : pour tout $x \in ]-1,1[$

$$\frac{\arcsin(x)\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{\arccos(x)T_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

d'où

$$\int_{-1}^{1}\frac{\arcsin(x)\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{\arccos(x)T_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\ .$$

**7)**

On pose $f_n(x) = \dfrac{1}{(2n+1)^2}\dfrac{\arccos(x)T_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, on a :

$f_n$ est continue sur $]-1,1[$ et $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{(2n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donc $f_n$ est intégrable sur $]-1,1[$.

$\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]-1,1[$.

$\sum\limits_{n\geq 0}\int_{-1}^{1}|f_n|$ converge .

Le théorème de permutation somme et intégrale donne alors :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{\arcsin(x)\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{\arccos(x)T_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= -\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}\end{aligned}$$