

Problème 1

I - Préliminaire :

1°) $\text{div } \vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0}$ $\text{rot } \vec{B}(M,t) = \mu_0 \vec{j}(M,t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t}$
 $\text{div } \vec{B}(M,t) = 0$ $\text{rot } \vec{E}(M,t) = - \frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$ ----- 0

2°) $\text{div}(\text{rot } \vec{B}) = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{j}(M,t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{E}(M,t)) = 0$
 $\Rightarrow \text{div } \vec{j}(M,t) + \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} = 0$ ----- 0,5

3°) $\rho(M,t) = 0 ; \vec{j}(M,t) = \vec{0} ; \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{rot}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \Rightarrow \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$
 $= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ ----- 0,5
 $\Rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ de même $\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

4°) $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_1(t - \frac{x}{c}) + \vec{E}_2(t + \frac{x}{c})$
 $\vec{B}(x,t) = \vec{B}_1(t - \frac{x}{c}) + \vec{B}_2(t + \frac{x}{c})$
 pour l'étude (\vec{E}_1, \vec{B}_1) : $\text{div } \vec{B}_1 = 0 \Rightarrow \vec{u}_x \cdot \vec{B}_1 = 0$
 $\text{div } \vec{E}_1 = 0 \Rightarrow \vec{u}_x \cdot \vec{E}_1 = 0$
 $\text{rot } \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_1}{c}$
 $\text{rot } \vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \Rightarrow \vec{E}_1 = c \vec{B}_1 \wedge \vec{u}_x$
 structure: (\vec{E}_1, \vec{B}_1) est transversal
 $\vec{k} = k \vec{u}_x, \vec{E}$ et \vec{B} forment un trièdre direct

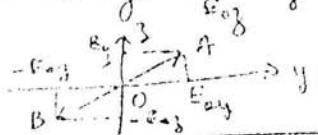
II - Etats de polarisation

5°) $\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{E_0 z}{c} \cos(\omega t - kx - \varphi) \\ B_z = \frac{E_0 y}{c} \cos(\omega t - kx) \end{cases} / (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ----- 0,5

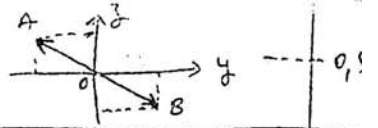
6°) 6-1) c'est l'ensemble de points d'une courbe fermée bien déterminée décrite par l'extrémité du vecteur champ électrique \vec{E} dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation. ----- 0,5

6-2) $\frac{E_z}{E_0 y} = \cos(\omega t - kx) ; \frac{E_z}{E_0 y} = \frac{E_z}{E_0 y} \cos \varphi + \sin(\omega t - kx) \sin \varphi$
 $\cos^2(\omega t - kx) + \sin^2(\omega t - kx) = 1 \Rightarrow \left(\frac{E_z}{E_0 y}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_0 y}\right)^2 - \frac{2 E_y E_z \cos \varphi}{E_0 y E_0 z} = \sin^2 \varphi$ ----- 0,2

07°) a°) $\varphi = 0 \Rightarrow E_y = \frac{E_0 y}{E_0 z} E_z$: polarisation rectiligne.
 L'extrémité de \vec{E} décrit, sinusoidalement dans le temps le segment $A \rightarrow O \rightarrow B \rightarrow O \rightarrow A$

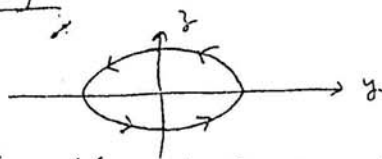


b) $\varphi = \pi \Rightarrow E_y = -\frac{E_{0y}}{E_{0z}} E_z$: polarisation rectiligne



c) $\varphi \in]0, \pi[$: l'extrémité de \vec{E} décrit une ellipse \Rightarrow l'onde présente une polarisation elliptique.

pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ par exemple :



l'orientation gauche ou droite dépend du signe de $\sin \varphi$, en effet :

à $t=0$ (au plan $x=0$)

$$\begin{cases} E_y = E_{0y} \text{ (maximale)} \\ \frac{dE_z}{dt} \Big|_{t=0} = E_{0z} \omega \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$\sin \varphi > 0$: gauche
 $\sin \varphi < 0$: droite

donc pour $\varphi \in]0, \pi[$: la polarisation est elliptique gauche.

d) $\varphi \in]\pi, 2\pi[$: la polarisation est elliptique droite ($\sin \varphi < 0$)

8°) Polarisation circulaire gauche : $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $E_{0y} = E_{0z}$

Polarisation circulaire droite : $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ et $E_{0y} = E_{0z}$

III - Polarisation des ondes lumineuses :

Partie A : Loi de Malus

9°) La lumière naturelle est non polarisée : en moyenne, elle ne laisse apparaître aucune direction de vibration privilégiée. Elle peut être considérée comme la superposition de deux ondes polarisées rectilignement suivant deux directions perpendiculaires (oy et oz par exemple), incohérentes entre elles et de même amplitude.

10°) On impose à un faisceau de lumière monochromatique non polarisée de traverser un polaroïd. A la sortie, l'onde sera polarisée rectilignement selon l'axe du polaroïd. On peut l'analyser en plaçant un deuxième polaroïd derrière le premier, lorsque les deux sont croisés, on observe "extinction".

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + E_0 \cos(\omega t - kx - \varphi) \vec{u}_z \quad \text{où } \varphi = \varphi(x, t)$$

$$\langle \vec{E}_i^2 \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 + \frac{1}{2} E_0^2 = E_0^2$$

à la sortie du polaroïd : $\vec{E}_1 = \left[E_0 \cos \beta \cos(\omega t - kx) + E_0 \sin \beta \cos(\omega t - kx - \varphi) \right] \vec{u}$

où \vec{u} : direction de l'axe du polaroïd :

$$\langle \vec{E}_1 \rangle^2 = \frac{1}{2} E_0^2 = \frac{1}{2} \langle \vec{E}_i^2 \rangle \Rightarrow \boxed{D_1 = \frac{1}{2} D_0}$$

11°) à la sortie de Z_1 : $\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$
 à la sortie de Z_2 : $\vec{E}_2 = E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$
 $\langle \vec{E}_2^2 \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \cos^2 \alpha = \langle \vec{E}_1^2 \rangle \cos^2 \alpha \Rightarrow \boxed{D_2 = D_1 \cos^2 \alpha}$ (loi de Malus)

Partie B: Polarisation par diffusion:

13-1) $\vec{p}(t) = q \cdot z(t) \vec{u}_z = p_0 \cos \omega t \vec{u}_z$

13-2) symétrie: $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$: plan de symétrie de la distribution
 $\Rightarrow \vec{E} \in \vec{a}$ au plan: $\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$

• la distribution est invariante par rotation d'angle φ autour de (Oz)

$\Rightarrow E_r(\kappa) = E_r(r, \theta)$ et $E_\theta(\kappa) = E_\theta(r, \theta)$

d'où: $\vec{E}(r, t) = E_r(r, \theta, t) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, t) \vec{u}_\theta$

13-3) $\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_m + \vec{E}_r$

$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} (2p \cos \theta \vec{u}_r + p \sin \theta \vec{u}_\theta)$: champ proche (dipôle en AROS)

$\vec{E}_m = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^2 c} \frac{\partial p}{\partial t} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$: champ moyen

$\vec{E}_r = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \sin \theta \vec{u}_\theta$: champ lointain du rayonné.

En effet: E_p varie en $\frac{1}{r^3}$, E_m en $\frac{\omega}{r^2 c} = 2\pi \frac{1}{r^2 \lambda}$

E_r en $\frac{\omega^2}{r c^2} = 4\pi^2 \frac{1}{r^2 \lambda^2}$

Approximation dipolaire: $r \gg \lambda_0$

AROS au niveau du dipôle: $\lambda \gg \lambda_0$

13-4) Zone de rayonnement: $r \gg \lambda \gg \lambda_0$

dans cette zone: $\frac{1}{r^3} \ll \frac{1}{r^2 \lambda} \ll \frac{1}{r \lambda^2} \Rightarrow \frac{1}{r^3} \ll \frac{\omega}{r^2 c} \ll \frac{\omega^2}{r c^2}$

champ rayonné: $\vec{E} = - \frac{\omega^2 p_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r c^2} \cos(\omega t - \frac{\omega r}{c}) \vec{u}_\theta$

13-5) $\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c} \Rightarrow \vec{B} = - \frac{\mu_0 \omega^2 p_0 \sin \theta}{4\pi r c} \cos(\omega t - \frac{\omega r}{c}) \vec{u}_\varphi$

13-6) $\vec{\mathcal{H}} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \vec{\mathcal{H}} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_r$: la rayonnement se propage vers

l'extérieur d'une sphère entourant le dipôle.

$\|\vec{\mathcal{H}}\| = \frac{p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = \mathcal{H}_0(r) \sin^2 \theta = \mathcal{H}$