

Correction de l'épreuve de Mathématiques Concours en Physique et Chimie

Partie I :

A)

1. a) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\frac{1}{(x-n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\approx} \frac{1}{n^2}$, donc f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. De plus

$$f(-x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(-x+n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}. \text{ Donc } f \text{ est paire.}$$

$$f(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n+1)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}. \text{ Donc } f \text{ est 1-périodique.}$$

b) Il suffit de montrer que f est continue sur $]0, 1[$. De plus il suffit de montrer que la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \text{ converge uniformément sur tout intervalle } [a, b] \subset]0, 1[. \text{ Pour } x \in [a, b],$$
$$\frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{n^2}, \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } \frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{(n-a)^2}, \text{ pour } n \leq -1. \text{ Donc la série}$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \text{ converge uniformément sur } [a, b] \text{ et } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

$$2. f\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(x+2n)^2}, f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(x+2n+1)^2}.$$

$$\text{Donc } 4f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

3. a) Pour $|x| \geq 1$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2} \right)$ converge uniformément sur tout

intervalle $[-a, a]$, avec $0 < a < 1$. Donc $f(x) - \frac{1}{x^2}$ se prolonge par continuité sur $] -1, 1[$.

De plus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \frac{-\pi^2}{3}$. Donc l'application $g: x \mapsto f(x) - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}$ se prolonge par continuité en 0.

b) Comme g est 1-périodique, alors g se prolonge sur \mathbb{R} en une application h continue bornée sur \mathbb{R} .

4. a) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, l'application $x \mapsto S(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}$ vérifie la même relation que f à

savoir $4S(x) = S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{1+x}{2}\right)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $4h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{1+x}{2}\right)$. Le résultat est obtenu par passage à la limite car h est continue sur \mathbb{R} .

b) Soit $x_0 \in [0, 1]$ tel que $|h(x_0)| = \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| = M$. Alors d'après la relation précédente appliquée au point x_0 , on aura $4M \leq 2M$, donc $M = 0$. Donc h est identiquement nulle sur \mathbb{R} et

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

B)

1. a) $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(tx) dt = \frac{2 \sin \pi x}{\pi x}$ et pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos tx \cos ntdt = \frac{(-1)^n 2x \sin \pi x}{\pi(x^2 - n^2)}$.

Comme la fonction F est continue et de classe C^1 par morceaux, alors pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$\cos tx = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2x^2}{x^2 - n^2} \cos nt \right).$$

b) On applique la relation précédente pour $t = 0$, on aura pour $x \notin \mathbb{Z}$:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2}.$$

On applique la relation au point $t = \pi$, on aura:

$$\pi \cotg \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

2. On calcule les deux sommes précédentes pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on aura: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - 2n^2} = \frac{\pi \cotg \frac{\pi\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 - 2n^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{2} \right) \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

3. a) Pour $x \in]-1, 1[$, $\log\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\approx} \frac{-x^2}{n^2}$, donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ converge absolument sur $] -1, 1[$.

On pose $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$, pour $x \in]-1, 1[$.

b) $\Phi(0) = 0$. Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ converge sur $] -1, 1[$ et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$ converge uniformément sur tout $[a, b] \subset] -1, 1[$, alors et $\Phi'(x) = \pi \cotg(\pi x) - \frac{1}{x}$, pour $x \in] -1, 1[\setminus \{0\}$.

c) Il en résulte que $\Phi(x) = \log\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)$, pour $x \in] -1, 1[\setminus \{0\}$, et la relation se prolonge en 0.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = e^{\Phi(x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$.

C)

1. Au voisinage de 0, $t^{x-1}e^{-t} \approx t^{x-1}$ qui est intégrable ssi $x > 0$, et pour tout $x > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 t^{x-1} e^{-t} = 0$. Donc au voisinage de $+\infty$, $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Il en résulte que la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, pour tout $x > 0$.

2. a) Par une intégration par parties, dans

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt,$$

on aura: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

b) Comme $\Gamma(1) = 1$, alors $\Gamma(n) = (n-1)!$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. L'application $t \mapsto f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. De plus pour tout $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| = |(\log t)^n f(x, t)| \leq \varphi(t)$, avec $\varphi(t) = |\log t|^{n+a-1}$, pour $t \leq 1$ et $\varphi(t) = |\log t|^{n+b-1}e^{-t}$, pour $t \geq 1$, qui est intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)^n t^{x-1} e^{-t} dt$.

4. a) D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $0 < u < 1$, il existe $0 < c < u$ tel que $\log(1-u) = -\frac{u}{1-c} \leq -u$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \chi_n(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$, avec $\chi_n(t)$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, n]$. La fonction f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie par: $f(t) = e^{-t} t^{x-1}$. De plus $f_n(t) \leq e^{-t} t^{x-1}$ qui est une fonction intégrable. Donc d'après le théorème de convergence dominée

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt, \quad \forall x > 0$$

c) Pour $n = 1$, $\int_0^1 (1-t)t^{x-1} dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$, donc la formule est vraie pour $n = 1$. On suppose la relation est vraie pour n . Par une intégration par partie $\int_0^1 (1-t)^{n+1} t^{x-1} dt = \frac{n+1}{x} \int_0^1 (1-t)^n t^x dt$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

d) Avec le changement de variable $t = nu$, $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt$.
Donc

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}, \quad \forall x > 0.$$

5. Pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \frac{n^{1-x} n!}{\prod_{k=0}^n (k+1-x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

6. a) $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$, donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

b) On fait le changement de variable $x^2 = 2t$ dans l'intégrale, $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, on aura:
 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}$.

7. a) Par une intégration par partie dans l'intégrale définissant I_k , on aura: $I_{k+1} = (2k+1)I_k$.

$$b) I_k = \frac{(2k)!}{k!2^k} I_0 = \frac{(2k)!}{k!2^k} \sqrt{2\pi}.$$

Partie II :

A)

1. a) Soient $f, g \in E$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)g(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Donc la fonction $x \mapsto f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

b) $E \neq \emptyset$ car il contient l'application nulle. De plus si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(f(x) + \lambda g(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = f^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + \lambda^2 g^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + 2\lambda f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui est intégrable sur \mathbb{R} . Donc E est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. L'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ définie sur $E \times E$ est une forme bilinéaire symétrique.

Si $f \in E$, alors $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq 0$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \iff f^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

3. a) L'application $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\varphi(f) = f(0)$ est une forme linéaire non nulle, donc $\text{Ker } \varphi = F$ est un hyperplan de E .

Toute fonction qui n'est pas dans F engendre un supplémentaire de F . Il suffit de prendre l'application constante 1.

b) i) Soit $f \in F^\perp$. L'application g définie par: $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2} f(x)$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $g(0) = 0$ et $g^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \leq f^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$. Donc $g^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur \mathbb{R} et $g \in F$.

ii) On a $0 = \langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 f^2(x)}{1+x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, donc $xf(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Donc $F^\perp = \{0\}$.

iii) La décomposition $E = F \oplus F^\perp$ n'est plus valable car $F \neq E$ et $F^\perp = \emptyset$.

c) Soit ψ la forme linéaire sur E définie par $\psi(f) = f(0)$.

i) Supposons qu'il existe une fonction $g \in E$ telle que $\psi(f) = \langle f, g \rangle$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\psi(f_n) = \langle f_n, g \rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $1 = |f_n(0)|^2 \leq \|f_n\|^2 \|g\|^2 = \frac{\|g\|^2}{\sqrt{1+4n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde.

ii) Soit $Q(X) = aX^2 + bX + c$ tel que $\psi(P) = \langle P, Q \rangle$, $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors pour $P = 1$, on aura: $a + c = 1$, pour $P(X) = X$, on aura: $b = 0$ et pour $P(X) = X^2$, on aura: $3a + c = 0$. Le polynôme Q est donné par: $Q(X) = \frac{-1}{2}X^2 + \frac{3}{2}$.

B) On considère la fonction h sur \mathbb{R} par: $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. a) $h'(x) = -xh(x)$. On suppose qu'il existe un polynôme P_n tel que $h^{(n)}(x) = P_n(x)h(x)$. Alors $h^{(n+1)}(x) = (P_n'(x) - xP_n(x))h(x)$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $h^{(n)}(x) = P_n(x)h(x)$ et la suite $(P_n)_n$ vérifie $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - XP_n(X)$.

b) $P_0 = 1$, $P_1 = -X$, $P_2 = X^2 - 1$ et $P_3 = -X^3 + 3X$.

c) Le degré de P_0 est 0. Si $\deg P_n = n$, alors comme $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - XP_n(X)$, donc $\deg P_{n+1} = n + 1$. Le coefficient de plus haut degré de P_0 est 1. On suppose que le coefficient de plus haut degré de P_n est $(-1)^n$, alors comme $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - XP_n(X)$, alors le coefficient de plus haut degré de P_{n+1} est $(-1)^{n+1}$.

le polynôme P_0 est pair. Si P_n a la même parité que n , alors P_n' a la même parité que $n + 1$. Comme $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - XP_n(X)$, alors P_{n+1} a la même parité que $n + 1$.

2. a) $h^{(n+2)}(x) = (P_n''(x) - 2xP_n'(x) + (x^2 - 1)P_n(x))h(x)$. D'autre part:

$$\begin{aligned} h^{(n+2)}(x) &= (-xh(x))^{(n+1)} = -(xh^{(n+1)} + (n+1)h^{(n)}) = -(xP_{n+1}(x)h(x) + (n+1)P_n(x)h(x)) \\ &= -(x(-xP_n(x) + P_n'(x)) - (n+1)P_n(x))h(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $P_n''(x) - 2xP_n'(x) + (x^2 - 1)P_n(x) = x^2P_n - xP_n'(x) - (n+1)P_n(x)$.
Donc $P_n''(x) - xP_n'(x) + nP_n(x) = 0$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n'(x) = (P_{n-1}'(x) - xP_{n-1}(x))' = P_{n-1}''(x) - xP_{n-1}'(x) - P_{n-1}(x) = -nP_{n-1}.$$

3. Soit $N \geq 2$ un entier naturel. On considère l'espace $\mathbb{R}_N[X]$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^N\}$. Soit $\psi: \mathbb{R}_N[X] \rightarrow \mathbb{R}_N[X]$ définie par: $\psi(P) = P'' - XP'$.

a) ψ est linéaire et si $P \in \mathbb{R}_N[X]$, alors $\deg(P'' - XP') \leq N$, donc ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.

b) La matrice de ψ dans \mathcal{B} est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & k(k-1) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & N(N-1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -N \end{pmatrix}$$

c) Les valeurs propres de ψ sont $\{-k; 0 \leq k \leq N\}$ et elles sont simples. Donc ψ est diagonalisable.

d)

$$\begin{aligned} \langle \psi(P), Q \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(P)(x)Q(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (P'(x)e^{-\frac{x^2}{2}})'Q(x)dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)Q'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)(Q'(x)e^{-\frac{x^2}{2}})'dx = \langle P, \psi(Q) \rangle \end{aligned}$$

e) On a $\psi(H_k) = H_k'' - XH_k' = -kH_k$. Donc H_k est un vecteur propre de ψ associé à la valeur propre $-k$, pour tout $0 \leq k \leq N$. Comme ψ est un endomorphisme auto-adjoint, alors les sous-espaces propres sont orthogonaux et par suite la famille $\{H_0, H_1, \dots, H_N\}$ est orthogonale.

4. a)

$$\begin{aligned} \|H_k\|^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_k^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_k(x)h^{(k)}(x)dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_k'(x)h^{(k-1)}(x)dx = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{k-1}^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx = k\|H_{k-1}\|^2. \end{aligned}$$

b) Comme $\|H_0\| = 1$, alors $\|H_k\| = \sqrt{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

c) $\{H_0, H_1, \frac{H_2}{2!}, \dots, \frac{H_N}{N!}\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}_N[X]$.

5. a) La projection orthogonale du polynôme X^{N+1} sur le sous-espace $\mathbb{R}_N[X]$ est $\sum_{k=0}^N \frac{\langle X^{N+1}, H_k \rangle}{k!} H_k$.

Donc $X^{N+1} - \sum_{k=0}^N \frac{\langle X^{N+1}, H_k \rangle}{k!} H_k$ est orthogonal à $\{H_0, H_1, \dots, H_N\}$. Donc il existe une constante α telle que $X^{N+1} = \alpha H_{N+1}$. Comme X^{N+1} et H_{N+1} sont unitaires, alors $\alpha = 1$.

Autre méthode :

$\{H_0, H_1, \dots, H_{N+1}\}$ est une base de $\mathbb{R}_{N+1}[X]$, donc il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tels que

$$X^{N+1} = \sum_{j=0}^{N+1} \alpha_j H_j.$$

On a : $\langle X^{N+1}, H_j \rangle = \alpha_j \|H_j\|^2 = \alpha_j j!$, donc $\alpha_j = \frac{\langle X^{N+1}, H_j \rangle}{j!}$. Donc

$$X^{N+1} = \sum_{j=0}^{N+1} \frac{\langle X^{N+1}, H_j \rangle}{j!} H_j.$$

Comme X^{N+1} et H_{N+1} sont unitaires, alors $\alpha_{N+1} = 1$. D'où

$$H_{N+1} = X^{N+1} - \sum_{k=0}^N \frac{\langle X^{N+1}, H_k \rangle}{k!} H_k.$$

b) La projection orthogonale du polynôme X^{N+1} sur le sous-espace $\mathbb{R}_N[X]$ est $R_N(X) = \sum_{k=0}^N \frac{\langle X^{N+1}, H_k \rangle}{k!} H_k$. Donc

$$\inf_{P \in \mathbb{R}_N[X]} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^{N+1} - P(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \|X^{N+1} - R_N(X)\|^2 = \sqrt{2\pi} \|H_{N+1}\|^2 = \sqrt{2\pi} (N+1)!$$

6. On suppose que n est pair.

a) Soit $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$ de rayon de convergence $R > 0$. y est solution de l'équation différentielle (E_n) ssi $a_{2k+3} = \frac{(2k+1)-n}{(2k+3)(2k+2)} a_{2k+1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) Comme n est pair, alors $a_{2k+1} \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $R = +\infty$.

c) Si f_n la solution donnée par la série entière précédente. f_n est impaire et H_n est une solution paire. Donc (f_n, H_n) est une base de solutions de (E_n) .