REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
de la Recherche Scientifique et de la Technologie

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2003

Concours en Physique et Chimie

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4H	Date : 6 Juin 2003	8H	Nb pages : 4
Barème :	Partie I : 10pts,	Partie II : 10pts	

L'usage des calculatrices est strictement interdit.
Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Partie I :

A) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\Big) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

1. a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, paire, 1-périodique.
   b) Montrer soigneusement que f est continue.
2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $4f(x) = f(\frac{x}{2}) + f(\frac{1+x}{2})$.
3. a) Montrer que l'application $g\colon x \longmapsto f(x) - \dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}$ se prolonge par continuité en 0.
   b) En déduire que g se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une application h continue bornée sur $\mathbb{R}$.
4. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4h(x) = h(\frac{x}{2}) + h(\frac{1+x}{2})$.
   b) En déduire que h est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

   (On pourra considérer $M = Sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$).

B) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on considère la fonction $F(t) = \cos(tx)$, pour $t \in [-\pi, \pi]$.

1. a) Donner la série de Fourier de F.

   b) En déduire que

$$\pi \mathrm{cotg}(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{x^2 - n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - 2n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 - 2n^2}$.

3. a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 - \frac{x^2}{n^2})$ converge absolument pour $x \in]-1, 1[$.

   On pose $\Phi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 - \frac{x^2}{n^2})$, pour $x \in]-1, 1[$.

   b) Calculer $\Phi(0)$ et $\Phi'(x)$, pour $x \in]-1, 1[$.

   c) En déduire que $\Phi(x) = \log(\frac{\sin \pi x}{\pi x})$, pour $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$.

   d) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{x^2}{k^2})$.

C)

1. Montrer que la fonction $t \longmapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, pour tout $x > 0$.

   On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, sur $]0, +\infty[$.

2. a) Montrer que pour $x > 0$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$

   b) En déduire $\Gamma(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ puis de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et donner les dérivées successives de Γ sous forme intégrale.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n \colon [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par:

   $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n$ si $0 \le t \le n$ et $f_n(t) = 0$ si $t \ge n$.

   a) Montrer que $f_n(t) \le e^{-t}$, $\forall t \ge 0$. (**On pourra montrer que** $\log(1 - u) \le -u$, **si** $0 < u < 1$.)

   b) En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt, \quad \forall x > 0.$$

   c) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\displaystyle\int_0^1 (1 - t)^n t^{x-1} dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

   d) En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}, \quad \forall x > 0.$$

5. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2})} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

6. a) Donner la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

   b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx$.

7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k}e^{\frac{-x^2}{2}}dx$.

   a) Etablir une relation entre I_k et I_{k+1}.

   b) En déduire que $I_k = \frac{(2k)!}{k!2^k}\sqrt{2\pi}$.

Partie II :

A) Soit $E = \{f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R});\ f^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}\}$.

1. a) Montrer que si $f, g \in E$, alors la fonction $x \longmapsto f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   b) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ l'application définie sur $E \times E$ par:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

   Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

3. Soit $F = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$.

   a) Montrer que F est un hyperplan de E et donner un supplémentaire.

   b) Soit $f \in F^\perp$. On considère l'application g définie par: $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}f(x)$.

   i) Vérifier que $g \in F$.

   ii) En déduire que $F^\perp = \{0\}$.

   iii) La décomposition $E = F \oplus F^\perp$ est-elle valable ?

   c) Soit ψ la forme linéaire sur E définie par $\psi(f) = f(0)$.

   i) Montrer qu'il n'existe aucune fonction $g \in E$ telle que $\psi(f) = \langle f, g\rangle$. (**On pourra considérer la suite de fonctions** $(f_n(x) = e^{-nx^2})_n$).

   ii) Trouver le polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$\psi(P) = \langle P, Q\rangle, \quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X].$$

B) On considère la fonction h sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $h^{(n)}(x) = P_n(x)h(x)$ et $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - XP_n(X)$. ($h^{(n)}$ désigne la dérivée n-ème de h).
   b) Donner P_0, P_1, P_2 et P_3.
   c) En déduire que P_n est de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n$ et de même parité que n.
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n vérifie l'équation différentielle:

$$(E_n) \qquad y'' - xy' + ny = 0$$

   (On pourra calculer $h^{(n+2)}(x)$ de deux manières.)
   b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n' = -nP_{n-1}$.
   Pour la suite on note $H_n = (-1)^n P_n$.
3. Soit $N \geq 2$ un entier naturel. On considère l'espace $\mathbb{R}_N[X]$ muni de la base $\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^N\}$. Soit $\varphi: \mathbb{R}_N[X] \longrightarrow \mathbb{R}_N[X]$ définie par: $\varphi(P) = P'' - XP'$.
   a) Vérifier que φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.
   b) Ecrire la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.
   c) Déterminer les valeurs propres de φ, donner leurs multiplicités et en déduire que φ est diagonalisable.
   d) Montrer que pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$, $\langle \varphi(P), Q\rangle = \langle P, \varphi(Q)\rangle$. **(On pourra remarquer que $\varphi(P)(x) = (P'(x)e^{-\frac{x^2}{2}})'e^{\frac{x^2}{2}}$.)**
   e) En déduire que la famille $\{H_0, H_1, \dots, H_N\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$.
4. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $||H_k||^2 = k||H_{k-1}||^2$. (La norme $||\ ||$ est associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$).
   b) En déduire la valeur de $||H_k||$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   c) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_N[X]$
5. a) Montrer que

$$H_{N+1} = X^{N+1} - \sum_{k=0}^{N} \frac{\langle X^{N+1}, H_k\rangle}{k!} H_k.$$

   b) Trouver le polynôme $P \in \mathbb{R}_N[X]$ pour lequel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^{N+1} - P(x))^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

   est minimale, puis déterminer la valeur de ce minimum.
6. On suppose que n est pair.
   a) Montrer qu'il existe une solution de l'équation différentielle (E_n) développable en série entière de la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$. **(On pourra donner une relation de récurrence entre les a_{2k+1} et on ne cherche pas à les calculer.)**
   b) Préciser son rayon de convergence.
   c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_n).