REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2004

Concours Physique et Chimie

Epreuve de Mathématiques

Date : Lundi 07Juin 2004	**Heure : 8 H**	**Durée : 4 Heures**	**Nb pages : 5**

Barème: Pb 1 (I : 4,5 pts, II-A: 1,5 pts, II-B : 5 pts); Pb 2 (I : 4,5 pts, II : 4,5 pts)

L'usage des calculatrices est strictement interdit.
Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Problème 1.

Partie I

Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $u_n(\lambda) = \int_0^\pi ch(\lambda x)\cos(nx)dx$.

1. Montrer que $u_n(\lambda) = (-1)^n \dfrac{\lambda sh\lambda\pi}{n^2+\lambda^2}$ et en déduire que la série de terme général $u_n(\lambda)$ est convergente.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

   a) Calculer $\int_0^\pi D_n(x)dx$.

b) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a :

$$D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}, & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1, & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}, \end{cases}$$

où $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Soit φ l'application définie sur $[0 \ ,\pi]$ par $\varphi(x) = ch(\lambda x) - 1$.

   Montrer la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \frac{sh(\lambda\pi)}{2\lambda} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi(x)D_n(x)dx.$$

4. a) Montrer que la fonction $x \mapsto \Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{\sin(\frac{x}{2})}, & \text{si } x \in]0,\pi] \\ 0, & \text{si } x = 0 \ , \end{cases}$

   est de classe C^1 sur $[0 \ ,\pi]$.

   b) En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(x)D_n(x)dx = 0.$$

5. A l'aide des résultats précédents, montrer que pour $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\pi}{sh(\lambda\pi)} - \frac{1}{\lambda}\right).$$

6. Calculer les sommes des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{9n^2+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+4}.$$

Partie II

-A-

Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. On considère l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$y''(x) - \lambda^2 y(x) = \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que toute solution réelle de cette équation est de la forme

$$y(x) = \alpha ch(\lambda x) + \beta sh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2} \ , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. En déduire la solution **paire** de cette équation vérifiant $y'(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$.

-B-

1. Montrer que pour tout $x \in]-\pi\ ,\ \pi[$, on a :
$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

2. Montrer que pour tout $x \in [-\pi\ ,\ \pi]$, on a :
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n^2+\lambda^2)} \cos(nx) \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} \cos(nx).$$

   a) Montrer que h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que l'on a pour tout réel x,
   $$h''(x) = f(x).$$

   b) Vérifier que $\dfrac{\lambda^2}{n^2(n^2+\lambda^2)} = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^2+\lambda^2}.$

   c) En déduire que pour tout $x \in [-\pi\ ,\ \pi]$, on a :
   $$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} + \lambda^2 h(x).$$

4. Montrer que la fonction f est de classe C^2 sur $[-\pi\ ,\ \pi]$, paire et qu'elle est solution de l'équation différentielle : $y''(x) - \lambda^2 y(x) = \dfrac{1}{2}$ avec $y'(\pi) = \dfrac{\pi}{2}.$

5. Montrer que pour $x \in [-\pi\ ,\ \pi]$, on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} \cos(nx) = \frac{\pi}{2\lambda} \frac{ch(\lambda x)}{sh(\lambda\pi)} - \frac{1}{2\lambda^2}.$$

6. Montrer que pour tout $x \in]-\pi\ ,\ \pi[$, on a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n}{n^2+\lambda^2} \sin(nx) = \frac{\pi}{2} \frac{sh(\lambda x)}{sh(\lambda\pi)}.$$

Problème 2.

On désigne par $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous espace de E formé par les polynômes de degré inférieur ou égal à n. Sur E, on considère le produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in E \ , \ \langle P \ / \ Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx.$$

Partie I

1. On définit la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes de E par récurrence :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_n = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n \ / \ P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k, \quad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

où $\|P_k\|^2 = \langle P_k \ / \ P_k \rangle$, pour $k \in \mathbb{N}$.

a) Calculer P_1 ,P_2 et P_3.

b) Vérifier que chaque polynôme P_n est de degré n.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

(On pourra raisonner par récurrence).

2. *a*) Montrer la relation d'orthogonalité :

$$\forall n \neq m; \quad \langle P_n \ / \ P_m \rangle = 0.$$

b) Montrer que $\{P_0 \ , \ P_1 \ ,\cdots, \ P_n\}$ est une base de E_n.

3. *a*) Montrer que pour tous n et p dans $\mathbb{N}$ avec $p < n$, on a :

$$\langle P_n \ / \ X^p \rangle = 0.$$

b) Soit $Q \in E$, de degré $q < n$, montrer que :

$$\langle P_n \ / \ Q \rangle = 0.$$

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\langle P_n \ / \ XP_{n-1} \rangle = \langle P_n \ / \ X^n \rangle .$$

En déduire que $\langle P_n \ / \ XP_{n-1} \rangle = \|P_n\|^2$.

4. *a*) Vérifier que pour tous P et Q dans E , on a :

$$\langle XP \,/\, Q\rangle = \langle P \,/\, XQ\rangle .$$

b) En décomposant le polynôme XP_n sur la base $\{P_0,\ P_1, \cdots, P_{n+1}\}$, montrer qu'il existe trois suites réelles (a_n) , (b_n) et (c_n) telles que

$$XP_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1},\ \text{pour tout } n \geq 1.$$

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_n = 1$, $b_n = 0$ et $c_n = \dfrac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2}$.

Partie II

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = (X^2 - 1)^n$ et $Q_n = \dfrac{d^n}{dx^n}(R_n)$, où $\dfrac{d^k}{dx^k}(R_n)$ désigne la dérivée $k^{ième}$ du polynôme R_n.

a) Quel est le degré du polynôme Q_n? Quel est le coefficient de son monôme de plus haut degré?

b) Vérifier que $\{Q_0 ,Q_1 , \cdots, Q_n\}$ est une base de E_n.

2. *a*) Montrer que pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, le polynôme $\dfrac{d^k}{dx^k}(R_n)$ s'annule en -1 et 1.

b) En intégrant par parties , montrer que pour tout $P \in E$,

$$\langle Q_n \,/\, P\rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} [\frac{d^n}{dx^n} P(x)] R_n(x) dx.$$

c) En déduire que $\langle Q_n \,/\, P_m\rangle = 0$, pour $m < n$.

d) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $Q_n = \lambda_n P_n$ puis calculer λ_n. $= \dfrac{(2n)!}{n!}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \|Q_n\|^2$ et $J_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx$.

a) Montrer que $I_n = (-1)^n (2n)! J_n$.

b) Trouver une relation entre J_n et J_{n-1} , pour $n \geq 1$ puis donner l'expression de J_n.

c) Donner alors $\|Q_n\|^2$, $\|P_n\|^2$ et $c_n = \dfrac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2}$.