Correction du Sujet de Maths (Physique et Chimie) : Session 2004

Problème 1.

Partie I

Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $u_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^\pi ch(\lambda x)\cos(nx)dx$.

1) • Une première intégration par parties

(avec $u(x) = \cos(nx)$ et $v'(x) = ch(\lambda x)$) donne :

$$u_n(\lambda) = \frac{(-1)^n}{\lambda} sh(\lambda\pi) + \frac{n}{\lambda}\int_0^\pi sh(\lambda x)\sin(nx)dx.$$

Une deuxième intégration par parties

(avec $f(x) = \sin(nx)$ et $g'(x) = sh(\lambda x)$) donne :

$$u_n(\lambda) = \frac{(-1)^n}{\lambda} sh(\lambda\pi) - \frac{n^2}{\lambda^2}u_n(\lambda).$$

2,5

$$\Rightarrow u_n(\lambda) = \frac{(-1)^n\lambda}{n^2+\lambda^2} sh(\lambda\pi).$$

(NB : On pourra aussi calculer $u_n(\lambda)$, en remarquant que

$$u_n(\lambda) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\pi e^{(\lambda+in)x}dx + \int_0^\pi e^{(-\lambda+in)x}dx\right).)$$

• $\forall\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|u_n(\lambda)| \leq \frac{|\lambda sh(\lambda\pi)|}{n^2}.$$

1

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente $\Rightarrow$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(\lambda)$ est absolument convergente et par suite convergente.

---

2) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n(x) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

a) $$\int_0^\pi D_n(x)dx = \int_0^\pi \left(1 + 2\sum_{k=1}^n \cos(kx)\right)dx = \pi + 2\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kx)dx.$$

Comme $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kx)dx = 0$, $\forall\ 1 \leq k \leq n$,

1,5

$$\Rightarrow \int_0^\pi D_n(x)dx = \pi.$$

---

b) • Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$ on a : $\cos(kx) = 1$.

(1) $\Rightarrow D_n(x) = 2n + 1$.

• Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors

2,5

$$D_n(x) = 1 + 2\,\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}) = 1 + 2\,\mathrm{Re}(e^{ix}.\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}})$$

(3,5)

$$= 1 + 2\,\mathrm{Re}(e^{i\frac{x}{2}}.\frac{1 - e^{inx}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}) = 1 + \mathrm{Re}(e^{i\frac{x}{2}}.\frac{e^{inx} - 1}{i\sin(\frac{x}{2})})$$

$$= \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

---

3) Comme $\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2}(D_n(x) - 1)$ et $ch(\lambda x) = \varphi(x) + 1$, on obtient

1 + 2,5

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} ch(\lambda x)\cos(kx)dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)) ch(\lambda x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (D_n(x) - 1)(\varphi(x) + 1)dx$$

(3,5)

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} D_n(x)\varphi(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} D_n(x) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} ch(\lambda x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} D_n(x)\varphi(x)dx + \frac{\pi}{2} - \frac{sh(\lambda\pi)}{2\lambda}.$$

---

4) *a)* Soit $\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{\sin(\frac{x}{2})}, & \text{si } x \in]0, \pi] \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(1) Il est clair que Φ est de classe C^1 sur $]0, \pi]$.

D'autre part comme $\Phi(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\lambda^2 \frac{x^2}{2}}{\frac{x}{2}} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \Phi(x) = 0 = \Phi(0)$.

(1) Donc Φ est continue sur $[0, \pi]$.

$\forall x \in]0, \pi]$, on a

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \frac{\lambda sh(\lambda x)\sin(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}(ch(\lambda x)-1)\cos(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{\lambda sh(\lambda x)}{\sin(\frac{x}{2})} - \frac{(ch(\lambda x)-1)\cos(\frac{x}{2})}{2\sin^2(\frac{x}{2})}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\Phi'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\lambda^2 x}{\frac{x}{2}}\right) - \lim_{x\to 0^+}\frac{\lambda^2\frac{x^2}{2}}{2(\frac{x}{2})^2} = \lambda^2 ,$$

(1,5) il en résulte que Φ est dérivable en 0 et $\Phi'(0) = \lambda^2$.

Par conséquent Φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

---

b) On a $\displaystyle\int_0^\pi \varphi(x)D_n(x)dx = \int_0^\pi \Phi(x)\sin((2n+1)\tfrac{x}{2})dx$.

Par intégration par parties (on pose $u(x) = \Phi(x)$ et $v'(x) = \sin((2n+1)\frac{x}{2})$) , on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \Phi(x)\sin((2n+1)\tfrac{x}{2})dx &= \left[\frac{2}{2n+1}\Phi(x)\cos((2n+1)\tfrac{x}{2})\right]_0^\pi \\ &\quad - \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi \Phi'(x)\cos((2n+1)\tfrac{x}{2})dx \\ &= -\frac{2}{2n+1}\int_0^\pi \Phi'(x)\cos((2n+1)\tfrac{x}{2})dx.\end{aligned}$$

(2)

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^* ,\ \left|\int_0^\pi \varphi(x)D_n(x)dx\right| \le \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi |\Phi'(x)|\,dx \le \frac{2\pi}{2n+1}M ,$$

(1,5) avec $M = \sup\limits_{x\in[0,\pi]} |\Phi'(x)| < \infty$ (car Φ' est continue sur $[0,\pi]$).

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \varphi(x)D_n(x)dx = 0.$

---

5) D'après **3**) on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^\pi D_n(x)\varphi(x)dx + \frac{\pi}{2} - \frac{sh(\lambda\pi)}{2\lambda}.$$

Par passage à la limite ($n\to\infty$) et en tenant compte de **4**-*b*) , on trouve pour $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \frac{sh(\lambda\pi)}{2\lambda}.$$

D'après 1) il en résulte que : $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\lambda}{n^2+\lambda^2}sh(\lambda\pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{sh(\lambda\pi)}{2\lambda}$.

1,5 Donc $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda}(\frac{\pi}{sh(\lambda\pi)} - \frac{1}{\lambda})$.

---

6) On pose $S(\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda}(\frac{\pi}{sh(\lambda\pi)} - \frac{1}{\lambda})$.

1 • On a : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9n^2+1} = \frac{1}{9}S(\frac{1}{3}) = \frac{\frac{\pi}{3}}{2sh(\frac{\pi}{3})} - \frac{1}{2}$.

1 • On a : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4} = S(2) = \frac{1}{4}(\frac{\pi}{sh(2\pi)} - \frac{1}{2})$.

Partie II

-A-

Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Notons par (E) l'équation différentielle

$$y''(x) - \lambda^2 y(x) = \frac{1}{2} \qquad (E)$$

et par (H) l'équation différentielle homogène associée

$$y''(x) - \lambda^2 y(x) = 0 \qquad (H).$$

1) Résolution de l'équation (E).

$1^{ère}$ étape : résolution de l'équation (H).

$\lambda + \lambda$ Comme l'équation caractéristique $(r^2 - \lambda^2 = 0)$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \lambda$ et $r_2 = -\lambda$, on en déduit que la solution générale de (H) est donnée par

2 $y_H(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Or , $e^{\lambda x} = ch(\lambda x) + sh(\lambda x)$ et $e^{-\lambda x} = ch(\lambda x) - sh(\lambda x)$, alors

$$y_H(x) = (A+B)ch(\lambda x) + (A-B)sh(\lambda x) = \alpha h(\lambda x) + \beta sh(\lambda x).$$

$2^{ème}$ étape : Il est clair que $y_p(x) = \frac{-1}{2\lambda^2}$, est une solution particulière de (E).

2 Par conséquent la solution générale de (E) est donnée par

$$y_G(x) = y_H(x) + y_p(x) = \alpha ch(\lambda x) + \beta sh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2} , \forall x \in \mathbb{R}.$$

---

2) On cherche une solution y de (E) vérifiant $\begin{cases} y(x) = y(-x) \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \\ y'(\pi) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

D'après **1)** $\exists \alpha \ , \ \beta \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha ch(\lambda x) + \beta sh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2} \\ &= y(-x) \\ &= \alpha ch(\lambda x) - \beta sh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \beta = 0.$

Donc $y(x) = \alpha ch(\lambda x) - \dfrac{1}{2\lambda^2}$

Comme $y'(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$, alors $\alpha = \dfrac{\pi}{2\lambda sh(\lambda\pi)}$.

Ainsi la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{\pi}{2\lambda sh(\lambda\pi)} ch(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2}$$

-B-

1) On considère la fonction φ 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $\varphi(x) = x$ sur $]-\pi \ , \ \pi]$.

La fonction φ est impaire et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Les coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(\varphi) = 0$. (car φ est impaire)
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(\varphi) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \varphi(x) \sin(nx) dx = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx$

Une intégration par parties (avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$) nous donne :

$$\begin{aligned} b_n(\varphi) &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos(nx) \right]_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nx) dx \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + 0. \end{aligned}$$

D'où $b_n(\varphi) = \dfrac{2}{n}(-1)^{n+1}$.

Comme φ est continue et dérivable sur $]-\pi\ ,\ \pi[$, le théorème de Dirichlet nous permet de conclure que la série de Fourier de φ (donnée par $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$) converge simplement sur $]-\pi\ ,\ \pi[$ vers la fonction φ , c'est à dire

$$\forall x \in]-\pi\ ,\ \pi[\ ,\quad x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

---

2) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que

$$\psi(x) = x^2 \quad \text{sur }]-\pi\ ,\ \pi].$$

La fonction ψ est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

Les coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(\psi) = 0$, (car ψ est paire)
- $a_0(\psi) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 dx = \dfrac{2}{3}\pi^2.$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(\psi) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx.$

Une intégration par parties (avec $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \cos(x)$) nous donne :

$$\begin{aligned} a_n(\psi) &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx \\ &= 0 - \frac{2}{n}\left[\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\right] \ ,\quad \text{(d'après 1)} \end{aligned}$$

D'où $a_n(\psi) = \dfrac{4}{n^2}(-1)^n.$

La série de Fourier de ψ en $x \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$\frac{a_0(\psi)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(\psi)\cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Comme la fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors le théorème de Dirichlet nous permet de conclure que la série de Fourier de ψ en x converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction ψ , en particulier

$$\forall x \in [-\pi\ ,\ \pi]\ ,\quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

---

3) *a*) Pour $x \in \mathbb{R}$, soient $h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n^2+\lambda^2)}\cos(nx)$

et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} \cos(nx)$.

On pose $w_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n^2+\lambda^2)} \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, w_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|w_n(x)| \leq \frac{1}{n^4}.$$

$$|w_n'(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{n(n^2+\lambda^2)} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{n^3}.$$

$$|w_n''(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} \cos(nx) \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent les séries de fonctions $\sum_{n\geq 1} w_n(x)$, $\sum_{n\geq 1} w_n'(x)$ et $\sum_{n\geq 1} w_n''(x)$ convergent normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} \cos(nx) = f(x).$$

---

b) Immédiate.

---

c) $\forall x \in [-\pi , \pi]$, on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} \cos(nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n^2} - \frac{\lambda^2}{n^2(n^2+\lambda^2)} \right] \cos(nx) \quad \text{(D'après } \mathbf{3}\text{-}b\text{)}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) - \lambda^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n^2+\lambda^2)} \cos(nx) \quad \text{(car les deux séries C.S sur } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \lambda^2 h(x)$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} + \lambda^2 h(x) \quad \text{(D'après } \mathbf{2}\text{)}.$$

---

4) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} \cos(nx)$.

0,5

· f est paire de manière évidente.

0,5

· Comme h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (d'après **3**-a) , alors (d'après **3**-c) f est de classe C^2 sur $[-\pi\ ,\ \pi]$ et $\forall x \in [-\pi\ ,\ \pi]$ on a :

$$f'(x) = \frac{x}{2} + \lambda^2 h'(x)$$

2

et $f''(x) = \frac{1}{2} + \lambda^2 h''(x) = \frac{1}{2} + \lambda^2 f(x)$ (d'après **3**-a).

$\Rightarrow f$ est une solution de l'équation différentielle : $y''(x) - \lambda^2 y(x) = \frac{1}{2}$.

1,5

De plus $f'(\pi) = \frac{\pi}{2} + \lambda^2 h'(\pi) = \frac{\pi}{2}$ (car $h'(\pi) = 0$).

---

5) D'après **4)** et **A-2)** , on a sur $[-\pi\ ,\ \pi]$

2,5

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} \cos(nx) = f(x) = \frac{\pi}{2\lambda sh(\lambda\pi)} ch(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2}.$$

---

6) D'après ce qui précède , on a pour tout $x \in]-\pi\ ,\ \pi[$ $f'(x) = \frac{x}{2} + \lambda^2 h'(x)$.

D'autre part , $f'(x) = \frac{\pi sh(\lambda x)}{2sh(\lambda\pi)}$.

$\Rightarrow \forall x \in]-\pi\ ,\ \pi[\ ,\ \frac{x}{2} + \lambda^2 h'(x) = \frac{\pi sh(\lambda x)}{2sh(\lambda\pi)}$.

En utilisant **B-1)** et l'expression de $h'(x)$ sous forme d'une série , on trouve

2,5

$$\begin{aligned}
\frac{\pi sh(\lambda x)}{2sh(\lambda\pi)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) + \lambda^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n^2+\lambda^2)} \sin(nx) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (1 - \frac{\lambda^2}{n^2+\lambda^2}) \sin(nx) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+\lambda^2} \sin(nx).
\end{aligned}$$

Problème 2.

Partie I

1) a) On a $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X^2 - \frac{1}{3}$ et $P_3(X) = X^3 - \frac{3}{5}X$.

---

b) Par récurrence , on a $P_0 = 1 \Rightarrow \deg(P_0) = 0$.

Supposons que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \leq n-1$.

On a $P_n = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n \,/\, P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k = X^n + Q_{n-1}$,

avec $Q_{n-1} = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n \,/\, P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k$.

Comme $\deg(Q_{n-1}) \leq n-1$ (par hypothèse de récurrence) , par conséquent $\deg(P_n) = n$.

---

c) On montre par récurrence : d'après a) cette proprieté est vraie pour P_0 et P_1 , supposons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre $(n-1)$: $\forall\, k \leq n-1$, $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.

$$\begin{aligned} P_n(-X) &= (-X)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n \,/\, P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k(-X) \\ &= (-1)^n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\langle X^n \,/\, P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k(X). \end{aligned}$$

Or $\forall\, k \in \{0\,.\,1\,,...n-1\}$ on a

$$\langle X^n \,/\, P_k\rangle = \int_{-1}^{1} x^n P_k(x)dx \overset{(u=-x)}{=} (-1)^{n+k} \int_{-1}^{1} u^n P_k(u)dx = (-1)^{n+k} \langle X^n \,/\, P_k\rangle$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} P_n(-X) &= (-1)^n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+2k} \frac{\langle X^n \,/\, P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k(X). \\ &= (-1)^n P_n(X). \end{aligned}$$

---

2) a) Montrons que : $\forall n \neq m$, $\langle P_n \,/\, P_m\rangle = 0$.

Par symétrie on peut supposer que $m < n$ et on procède par récurrence :

· La proprieté est vraie pour $n = 1$ (car $\langle P_1 \,/\, P_0\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} x dx = 0$)

· Supposons que pour tous $k < m \leq n-1$ $\langle P_k \ / \ P_m \rangle = 0$ et montrons que $\langle P_n \ / \ P_m \rangle = 0$.

On a $\langle P_n \ / \ P_m \rangle = \langle X^n \ / \ P_m \rangle - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n \ / \ P_k \rangle}{\|P_k\|^2} \langle P_k \ / \ P_m \rangle$.

En tenant compte du fait que $\langle P_k \ / \ P_m \rangle = 0$, $\forall k < m \leq n-1$, on obtient

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n \ / \ P_k \rangle}{\|P_k\|^2} \langle P_k \ / \ P_m \rangle = \frac{\langle X^n \ / \ P_m \rangle}{\|P_m\|^2} \langle P_m \ / \ P_m \rangle = \langle X^n \ / \ P_m \rangle$ //

$\Rightarrow \langle P_n \ / \ P_m \rangle = 0$.

(2)

$b)$ On sait que $\dim E_n = n+1$.

· Comme $\deg(P_k) = k \Rightarrow \{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ est une base de E_n.

· On pourra aussi montrer que la famille $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ est libre.
Pour cela soit $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + ... \alpha_n P_n = 0$.

$\Rightarrow \forall \ 0 \leq k \leq n$, $\langle \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + ... \alpha_n P_n \ / \ P_k \rangle = 0$.

D'après **2**-a) on trouve $\alpha_k \|P_k\|^2 = 0$ et par conséquent α_k , $\forall \ 0 \leq k \leq n$ (car $\|P_k\|^2 \neq 0$).

(1,5)

---

3) $a)$ Comme $\{P_0, P_1, \cdots, P_p\}$ est une base de E_p , alors $X^p = \sum_{j=0}^{p} \beta_j P_j$.

$\Rightarrow \langle P_n \ / \ X^p \rangle = \sum_{j=0}^{p} \beta_j \langle P_n \ / \ P_j \rangle = 0$

(car d'après **2**-a $\langle P_n \ / \ P_j \rangle = 0$ $\forall \ 0 \leq j \leq p < n$).

(1,5)

$b)$ Il suffit d'écrire $Q = \sum_{k=0}^{q} a_k X^q$ et d'utiliser **3**-a).

(1,5)

$c)$ · On a $P_{n-1} = X^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\langle X^{n-1} \ / \ P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k$

$\Rightarrow X P_{n-1} = X^n - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\langle X^{n-1} \ / \ P_k \rangle}{\|P_k\|^2} X P_k = X^n + Q$, avec $\deg(Q) \leq n-1 < n$.

Or $\langle P_n \ / \ Q \rangle = 0$ (d'après **3**-a)).

(1,5)

$$\Rightarrow \langle P_n \;/\; XP_{n-1}\rangle = \langle P_n \;/\; X^n\rangle + \langle P_n \;/\; Q\rangle = \langle P_n \;/\; X^n\rangle .$$

· On a $X^n = P_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n \;/\; P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k$

$$\Rightarrow \langle P_n \;/\; XP_{n-1}\rangle = \langle P_n \;/\; X^n\rangle = \left\langle P_n \;/\; P_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n \;/\; P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k \right\rangle$$

1,5

$$= \langle P_n \;/\; P_n\rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n \;/\; P_k\rangle}{\|P_k\|^2} \langle P_n \;/\; P_k\rangle$$

$$= \|P_n\|^2 + 0 \quad \text{(d'après 2-}a\text{)}$$

1

4) *a)* Immédiate.

---

b) $\deg(XP_n) = n + 1$, il se décompose dans la base $\{P_0, P_1, \cdots P_{n+1}\}$:

$$XP_n = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j P_j .$$

Pour tout $0 \le k \le n + 1$, on a

$$\langle XP_n \;/\; P_k\rangle = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j \langle P_j \;/\; P_k\rangle = \alpha_k \|P_k\|^2 \text{ (d'après } \mathbf{2}\text{-}a\text{)}.$$

D'autre part

$$\langle XP_n \;/\; P_k\rangle \overset{(\text{ d'après } \mathbf{4}\text{-}a)}{=} \langle P_n \;/\; XP_k\rangle = 0 \quad \text{si} \quad k + 1 < n \text{ (d'après } \mathbf{3}\text{-}b\text{)}.$$

On en déduit que $\alpha_k \|P_k\|^2 = 0$, si $k < n - 1$.

2,5

Comme $\|P_k\|^2 \neq 0$, $\alpha_k = 0$ pour tout $k < n - 1$.

Donc XP_n s'écrit alors $XP_n = \alpha_{n-1}P_{n-1} + \alpha_n P_n + \alpha_{n+1}P_{n+1}$.

Il suffit de prendre $a_n = \alpha_{n+1}$, $b_n = \alpha_n$ et $c_n = \alpha_{n-1}$.

$\Rightarrow XP_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}$, pour tout $n \ge 1$.

---

c) · XP_n étant un polynôme de degré $n + 1$, son terme de plus haut degré est X^{n+1}.

1

De même le polynôme $a_nP_{n+1} + b_nP_n + c_nP_{n-1}$ est de degré $n + 1$, son terme de plus haut degré est a_nX^{n+1} , ce qui donne (d'après **4**-*b*) $a_n = 1$, pour tout $n \ge 1$.

$\cdot$ On a $\langle XP_n \ / \ P_n\rangle = \int_{-1}^{1} x\,(P_n(x))^2\,dx = 0$ (car $x \mapsto (P_n(x))^2$ est paire).

D'autre part

$\langle XP_n \ / \ P_n\rangle = \langle P_{n+1} \ / \ P_n\rangle + b_n \|P_n\|^2 + c_n \langle P_{n-1} \ / \ P_n\rangle = b_n \|P_n\|^2$

(1) $\Rightarrow b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

$\cdot$ On a $\langle XP_n \ / \ P_{n-1}\rangle = \langle P_{n+1} \ / \ P_{n-1}\rangle + c_n \|P_{n-1}\|^2 = c_n \|P_{n-1}\|^2$.

D'autre part

$\langle XP_n \ / \ P_{n-1}\rangle = \langle P_n \ / \ XP_{n-1}\rangle = \|P_n\|^2$ (d'après **3**-c).

(1) $\Rightarrow c_n = \dfrac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2}$ pour tout $n \geq 1$.

Partie II

(1,5) 1) a) $\cdot$ $R_n = (X^2-1)^n$ est un polynôme de degré $2n \Rightarrow Q_n = \dfrac{d^n}{dx^n}(R_n)$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un polynôme de degré $2n$, donc $\deg(Q) = n$.

(1,5) $\cdot$ Le coefficient du plus haut degré de Q est $\dfrac{(2n)!}{n!}$.

---

b) On sait que $\dim E_n = n+1$.

(1) $\cdot$ Comme $\deg(Q_k) = k \Rightarrow \{Q_0, Q_1, \cdots, Q_n\}$ est une famille libre dans E_n et par suite c'est une base de E_n.

---

2) a) Le polynôme R_n possède deux racines 1 et -1 d'ordre de multiplicité égale à n.

(1,5) $\Rightarrow \forall\, 0 \leq k \leq n-1$, $\dfrac{d^k}{dx^k}R_n(1) = \dfrac{d^k}{dx^k}R_n(-1) = 0$.

---

b) Soit $P \in E$, on a $\langle Q_n \ / \ P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}R_n(x)P(x)dx$.

En faisant une première intégration par parties et en tenant compte de **2**-a) on obtient

(1) $$\langle Q_n \ / \ P\rangle = -\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}R_n(x)(\frac{d}{dx}P(x))dx$$

Après n-intégartions par parties on trouve

(2) $$\langle Q_n \ / \ P\rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} [\frac{d^n}{dx^n}P(x)]R_n(x)dx.$$

c) Comme $m < n$, d'après **2**-*b*) on a $\langle Q_n \,/\, P_m\rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} [\frac{d^n}{dx^n} P_m(x)] R_n(x)dx$.

Or $[\frac{d^n}{dx^n} P_m(x)] = 0$, (car $0 \leq m < n$)

1,5 $\Rightarrow \langle Q_n \,/\, P_m\rangle = 0 \,,\ \forall\, 0 \leq m < n$.

---

d) · Soit $n \in \mathbb{N}$. On décompose le polynôme Q_n sur la base $\{P_0, P_1, \cdots P_n\}$:

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k.$$

1,5 Pour $m < n$, on a : $0 = \langle Q_n \,/\, P_m\rangle = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle P_k \,/\, P_m\rangle = \lambda_m \|P_m\|^2$.

$\Rightarrow \lambda_m = 0$ pour tout $m < n$ et par conséquent $Q_n = \lambda_n P_n$.

1,5 · En identifiant les monômes de plus haut degré on obtient $\lambda_n = \frac{(2n)!}{n!}$.

---

3) *a*) D'après **2**-*b* , on a

$$I_n = \|Q_n\|^2 = \langle Q_n \,/\, Q_n\rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} [\frac{d^n}{dx^n} Q_n(x)] R_n(x)dx$$

or $\frac{d^n}{dx^n} Q_n(x) = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} R_n(x) = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(X^{2n}) = (2n)!$

1,5 $\Rightarrow I_n = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} R_n(x)dx = (-1)^n (2n)! J_n$.

---

b) · On a

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x^2-1)(x^2-1)^{n-1} dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^2(x^2-1)^{n-1} dx - J_{n-1} \end{aligned}$$

Par une intégration par parties (avec $u(x) = x$ et $v'(x) = x(x^2-1)^{n-1}$) on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2(x^2-1)^{n-1}dx &= \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx \\ &= \left[\frac{x(x^2-1)^n}{2n}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2n}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx \\ &= 0 - \frac{1}{2n}J_n\end{aligned}$$

1,5 $\Rightarrow J_n = -\dfrac{2n}{2n+1}J_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

· D'après la relation de récurrence on obtient :

$$J_n = (-1)^n \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}J_0.$$

Or $J_0 = 2$.

2 $\Rightarrow J_n = (-1)^n \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1,5 c) · $\|Q_n\|^2 = (-1)^n(2n)!J_n = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$.

· On a $\|Q_n\| = \lambda_n \|P_n\|$

1,5 $\Rightarrow \|P_n\|^2 = \dfrac{\|Q_n\|^2}{\lambda_n^2} = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.\dfrac{(n!)^2}{(2n!)^2} = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)(2n!)^2}$.

1,5 · $c_n = \dfrac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} = \dfrac{n^2}{4n^2-1}$.

♣♣