REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2005

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2005

Concours en Physique Chimie
Epreuve de mathématiques

Durée: 4 heures Date : 10 Juin 2005 Heure : 8 H Nb pages : 5

Barème: **Exercice** (2.5pts). **Problème**: Partie I (3pts), Partie II (5.5pts), Partie III (6pts), Partie IV(3pts).

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

On considère la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt$.

1) Montrer que la fonction F est définie sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3) Calculer $F'(x)$ et en déduire l'expression de $F(x)$.

4) Application : calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t} dt$.

Problème

Partie I

$\mathcal{E}$ désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, et pour tout entier naturel n, $\mathcal{E}_n$ est le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ de $\mathcal{E}$, formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On considère l'endomorphisme G de $\mathcal{E}$ défini pour tout P élément de $\mathcal{E}$ par

$$(G(P))(X) = -3XP'(X) + (1 - X^2)P''(X).$$

Dans la suite, on désignera $G(P)$ par GP.

1) Montrer que $\mathcal{E}_n$ est stable par G.

On désigne par G_n l'endomorphisme de $\mathcal{E}_n$ induit par G.

2) On note A_n la matrice de G_n dans la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathcal{E}_n$.

2a) Expliciter A_2.

2b) Donner A_n, pour $n \geq 3$.

2c) En déduire que A_n est diagonalisable.

3) Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, ..., P_n)$ de $\mathcal{E}_n$, formée de vecteurs propres de G_n et vérifiant pour tout entier $0 \leq k \leq n$:

(i) $\deg P_k = k$.

(ii) le coefficient dominant de P_k est 2^k.

4) Pour tout $k = 0, ..., n$, on note λ_k la valeur propre de G_n associée au vecteur propre P_k et on pose $R_k(X) = P_k(-X)$.

4a) Montrer que $G_n R_k = \lambda_k R_k$.

4b) En déduire que $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.

Quelle est la parité de P_k ?

Partie II

Pour tout entier naturel n, on considère l'équation différentielle

$$(E_n) \quad (1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0.$$

On se propose de résoudre (E_n) sur]-1, 1[.

1) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur]-1, 1[?

2) Soit y une solution de (E_n) sur]-1, 1[. On pose $\theta = Arc\cos x$.

Montrer que la fonction z définie sur $]0, \pi[$ par $z(\theta) = \sin\theta \; y(\cos\theta)$, est solution de l'équation différentielle

$$(E'_n) \quad z'' + (n+1)^2 z = 0.$$

3) Déterminer la solution générale de l'équation (E'_n) sur $]0, \pi[$ puis celle de l'équation (E_n) sur]-1, 1[.

4) On se propose dans cette question de trouver les solutions polynomiales de $(E_n$ sur]-1, 1[. Soit y une telle solution.

4a) Vérifier que $\lim_{x \to 1} (\sqrt{1-x^2}\, y(x)) = 0$.

Montrer alors que y est proportionnelle à la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sin[(n+1) Arc\cos x]}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4b) En déduire qu'il existe un polynôme Q_n de $\mathcal{E}$ tel que

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \; Q_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

4c) Préciser Q_0 et Q_1 et montrer que pour tout entier n,

$$Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - Q_n.$$

4d) Montrer que le coefficient dominant de Q_n vaut 2^n et que le degré de Q_n est n

4e) Conclure que $P_n = Q_n$, où P_n est le polynôme défini dans la partie I.

5a) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

5b) Montrer que P_n admet exactement n racines simples situées dans]-1, 1[. Préciser ces racines.

5c) Montrer que $P_{n+1}(\cos\theta) = P_n(\cos\theta)\cos\theta + \cos((n+1)\theta)$.

5d) En déduire que $\forall x \in [-1, 1], \; |P_n(x)| \leq n+1$.

Partie III

Soit λ un réel vérifiant $0 < |\lambda| < 1$.

On considère la fonction f, 2π- périodique, paire définie par

$$\forall \theta \in [0, \pi], \; f(\theta) = \frac{1}{1 - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2}.$$

1) Vérifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) On note $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$, les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

2a) Que vaut b_n ?

2b) Montrer que $a_0 = \dfrac{2}{1-\lambda^2}$.

(On pourra effectuer le changement de variables $u = tg\dfrac{\theta}{2}$).

2c) Montrer que $a_1 = \dfrac{1+\lambda^2}{2\lambda} a_0 - \dfrac{1}{\lambda}$.

2d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda a_{n+2} - (1+\lambda^2)a_{n+1} + \lambda a_n = 0$.

2e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{2\lambda^n}{1-\lambda^2}$.

3a) Montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

3b) En déduire que les séries $\sum_{n\geq 1} a_{n+1}\sin(n\theta)$ et $\sum_{n\geq 1} a_{n-1}\sin(n\theta)$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

3c) On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(\theta) = \lambda f(\theta)\sin\theta$.

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $g(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \sin(n\theta)$.

3d) En déduire que $\forall\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, $f(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n P_n(\cos\theta)$.

(On rappelle que $P_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$).

3e) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\lambda^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-\lambda)^n$ et montrer que l'égalité précédente est vraie sur $\mathbb{R}$.

3f) En déduire la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 0}\lambda^n P_n(\cos\theta)$ sur $\mathbb{R}$.

(On pourra utiliser la question 5d) de la partie II).

4a) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0} P_n(\cos\theta)$?

4b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} P_n(\cos\theta)z^n$ où θ est un réel fixé et $z \in \mathbb{C}$.

4c) Pour x réel et $|x| < 1$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\cos\theta)x^n$.

Partie IV

On note F l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur [-1, 1] muni du produit scalaire $(./.)$ défini par

$$(f \;/\; g) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\; g(x)f(x)dx \text{ pour tous } f, g \in F.$$

On note $||\;.\;||$ la norme associée.

On considère l'endomorphisme G de $\mathcal{E}$ et la famille des polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis dans la partie I.

1a) Soit $P \in \mathcal{E}$. Vérifier que

$$\sqrt{1-x^2}(GP)(x) = \frac{d}{dx}[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)].$$

1b) Prouver que pour tous P, Q éléments de $\mathcal{E}$, $(GP \;/\; Q) = (P \;/\; GQ)$.

1c) En déduire que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale dans $\mathcal{E}$.

1d) Calculer $||P_n||$. (On pourra effectuer le changement de variables $x = \cos\theta$).

2) Soit g un élément de F. On suppose que g est C^1 par morceaux sur [-1, 1].

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n(g) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ (P_n\ /\ g)$.

On note h la fonction , 2π- périodique, impaire définie par

$$\forall \theta \in [0, \pi],\ h(\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ (\sin\theta) g(\cos\theta),$$

et on pose $b_{n+1}(h) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} h(\theta)\sin((n+1)\theta)d\theta$.

2a) Montrer que $d_n(g) = b_{n+1}(h)$.

2b) Montrer que g peut-être développée en série de polynômes P_n suivant la formule

$$\forall x \in]-1,\ 1[,\ g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(g) P_n(x).$$

2c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (d_n(g))^2$ est convergente et exprimer sa somme à l'aide de $||g||$.

3) Réciproquement, soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum\limits_{n\geq 0} (n+1)\alpha_n$ est absolument convergente.

3a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n P_n$ converge normalement sur [-1, 1]. On note ϕ sa somme.

3b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ d_n(\phi)$.