Enoncé
Session 2005 – Filière PC

Données :

- $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$
- Le vide est caractérisé par sa permittivité électrique ε_0 et sa perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ SI
- La célérité de la lumière dans le vide est $c = 3.10^8\ ms^{-1}$
- Dans la totalité de l'épreuve, l'espace est rapporté à un référentiel galiléen (Oxyz) de base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

PROBLEME N°1 :

On se propose dans ce problème d'étudier quelques propriétés liées à la propagation de la lumière dans un milieu diélectrique : dispersion, atténuation…

La dispersion peut être exploitée, par exemple, pour l'analyse de la lumière en utilisant un prisme.

Cependant, elle constitue l'un des problèmes à confronter lorsqu'on s'intéresse à la transmission de l'information. En effet, lors d'une propagation dans un milieu dispersif, les spectres des signaux contenant l'information se déforment ; ce qui provoque une perte de celle-ci.

Première Partie : Optique Géométrique et Dispersion

Préliminaires :

1- Enoncer les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction sur un dioptre séparant deux milieux transparents d'indices de réfraction n_1 et n_2.

2- Donner l'expression de l'angle de déviation D :

- En fonction de l'angle d'incidence i pour le rayon réfléchi (figure1.a),
- En fonction de i et de l'angle de réfraction r pour le rayon réfracté (figure 1.b).

1

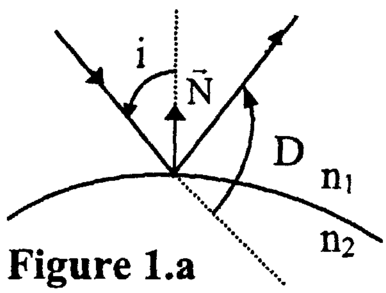


Figure 1.a

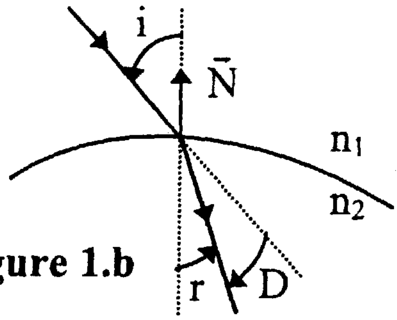


Figure 1.b

3- Faire des figures claires pour exposer les différentes situations observées (suivant les valeurs des indices) lors de la réfraction. Préciser les conditions d'existence du rayon réfracté.

Etude d'un prisme :

4- Un prisme d'angle au sommet A, est taillé dans un milieu transparent, homogène, isotrope et d'indice de réfraction n dépendant de la longueur d'onde λ dans le vide. Il est plongé dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1. Les rayons lumineux incidents sont contenus dans un plan perpendiculaire à l'arête du prisme (figure 2).

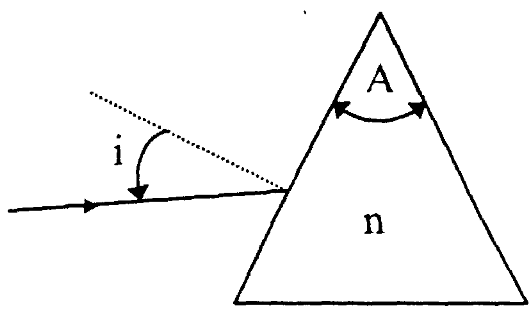


Figure 2

4-1- La lumière incidente est monochromatique. Tracer soigneusement la marche d'un rayon lumineux qui émerge du prisme.

4-2- Déterminer les relations reliant :

- l'angle d'incidence i à l'angle de réfraction r à la face d'entrée.
- l'angle d'émergence i' à l'angle de réfraction r' à la face de sortie.
- l'angle au sommet du prisme A à r et r'.
- l'angle de déviation D du rayon émergent à i, i' et A.

4-3- Déduire les conditions pour avoir un rayon émergent du prisme. On raisonne pour un angle d'incidence $i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Faire l'application numérique pour n = 1,52 et A = 60°.

4-4-

4-4-1- Tracer l'allure de la courbe donnant la variation de l'angle de déviation D en fonction de l'angle d'incidence i.

4-4-2- Expliquer *qualitativement* le fait qu'au minimum de déviation D_m, on a : i = i'. En notant i_m cette valeur, déduire une méthode expérimentale pour mesurer l'indice du prisme. Calculer les valeurs de D_m et i_m.

4-5- Sachant que l'indice n du prisme peut être donné par la formule simplifiée de Cauchy : $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$ où a et b sont des constantes, expliquer *qualitativement* l'effet du prisme sur une lumière incidente polychromatique.

4-6- En déduire l'expression de la dispersion angulaire du prisme, définie par $\left(\frac{dD}{d\lambda}\right)_{i=i_m}$ au voisinage du minimum de déviation.

Faire l'application numérique pour :

$$A = 60° \ ; \ a = 1,491 \ ; \ b = 10^{-2}\ (\mu m)^2 \text{ et } \lambda = 585 \text{ nm}.$$

5- *Application* : Le prisme décrit précédemment est monté sur un goniomètre. La fente source est dans le plan focal objet d'une lentille convergente L_1. Le spectre de la lumière sortant du prisme est observé sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente L_2, de distance focale image f'_2 = 40 cm. La fente source est éclairée par une lampe spectrale de Mercure. On s'intéresse à la raie verte de longueur d'onde λ_1 = 546,1 nm et la raie jaune de longueur d'onde $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$. Le prisme est réglé au minimum de déviation. Les deux images de la fente source sont séparées de 1,90 mm sur l'écran. Déterminer la valeur de la longueur d'onde λ_2.

Etude d'une fibre optique :

6- Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur cylindrique de diamètre d_1, homogène et isotrope, d'indice de réfraction n_1. Ce cœur est entouré d'une gaine de diamètre d_2, homogène et isotrope, d'indice de réfraction n_2 (figure 3)

6-1- Quelle est la condition que doivent vérifier les indices n_1 et n_2 pour qu'un rayon lumineux puisse être guidé dans le cœur de la fibre ? Expliquer brièvement le principe de ce guidage.

6-2- Un rayon lumineux arrive au point I sur la face d'entrée du guide (figure 3) avec un angle d'incidence θ.

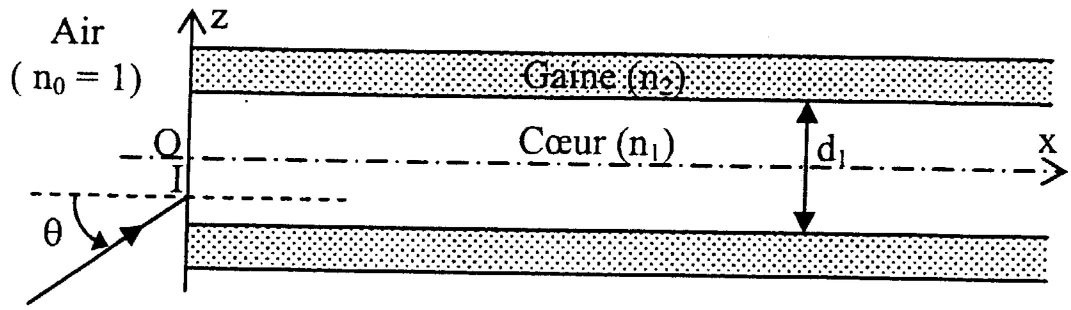


Figure 3

Justifier le fait que le trajet parcouru par ce rayon n'est plan que si le plan d'incidence contient l'axe (Ox) de la fibre ?

On s'intéresse dans la suite au rayon incident dans le plan (xOz).

6-3- Pour que ce rayon reste guidé par le cœur de la fibre, montrer que l'angle d'incidence θ, doit rester inférieur à un angle limite θ_a (angle d'acceptance).

Exprimer θ_a en fonction de n_1 et $\Delta = \left|\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}\right|$.

6-4- On appelle ouverture numérique ON du guide la quantité $ON = n_0 \sin\theta_a$, où n_0 est l'indice de réfraction de l'air pris égal à 1.

Déterminer l'expression de ON en fonction de n_1 et Δ.

Calculer ON et θ_a pour $n_1 = 1{,}50$ et $\Delta = 10^{-2}$.

6-5- Le mode de transmission numérique par fibre optique consiste à coder l'information sous forme d'une suite d'éléments binaires appelés bits. Chaque élément binaire vaut 1 ou 0. Dans la fibre, l'information est transmise sous forme d'une succession d'impulsions lumineuses, la présence de la lumière étant associée à l'état 1, son absence à l'état 0.

Une impulsion lumineuse arrive à $t = 0$, sous forme d'un faisceau conique de demi angle au sommet θ_a, convergent, au point O.

On ne considère que l'aspect géométrique de la propagation dans le guide de longueur ℓ.

6-5-1- Exprimer la différence δt entre la durée maximale et la durée minimale de la propagation dans le guide en fonction de ℓ, c, n_1 et Δ. Calculer δt pour $\ell = 2$ km.

6-5-2- Quelle durée minimale T doit séparer deux impulsions successives pour qu'elles ne se superposent pas à la sortie de la fibre ?

En déduire le débit maximal d'une ligne constituée par cette fibre, que l'on exprime en bits par seconde.

Deuxième Partie : Dispersion intermodale dans une fibre optique

7- En un point quelconque du diélectrique formant le cœur de la fibre optique étudiée précédemment, l'état électromagnétique résulte de la superposition des ondes qui ont subi des réflexions aux points I_1, I_2, I_3,.... du plan (xOz) (figure 4).

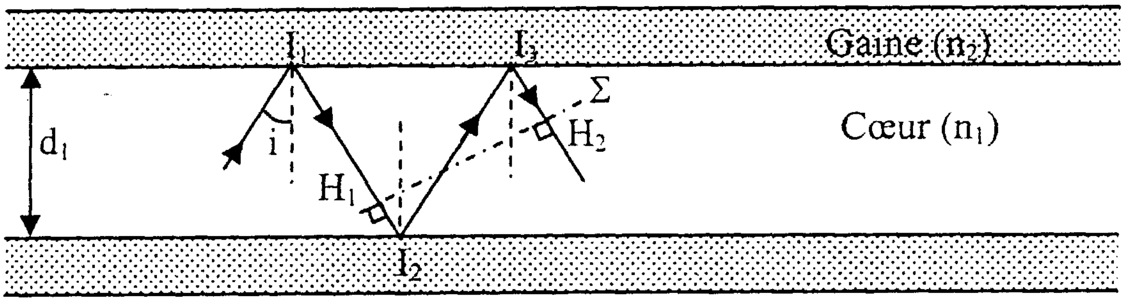


Figure 4

Dans le but de simplifier notre étude, on ne tient pas compte du déphasage dû à chaque réflexion.

Pour une direction caractérisée par l'angle d'incidence i avec la normale au dioptre de séparation cœur - gaine, on note Σ la surface d'onde associée à la propagation de l'onde le long du trajet I_1I_2.

7-1- En considérant les réflexions en I_2 et en I_3, montrer que la différence δ de chemin optique due à la propagation de l'onde entre les points H_1 et H_2, s'écrit : $\delta = 2\, n_1\, d_1 \cos i$.

7-2- En déduire la condition d'existence d'une onde progressive dans le guide : $n_0 \sin\theta = p\dfrac{\lambda}{2d_1}$, où p est un entier dont les valeurs sont associées par définition aux modes guidés de la fibre optique.

7-3- En déduire qu'il existe au moins un mode guidé.

Exprimer le nombre de modes guidés en fonction de n_1, d_1, Δ et la longueur d'onde dans le vide λ.

7-4- La fibre optique considérée est éclairée par un rayonnement de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1{,}55\mu m$.

7-4-1- Pour quelles valeurs de d_1 la fibre est monomode ?

7-4-2- Déterminer le nombre de modes de la fibre pour $d_1 = 30\mu m$.

7-5- Montrer que, pour une longueur ℓ de la fibre, la différence des temps de parcours du mode le plus lent et du mode le plus rapide s'écrit :

$$\delta t' \approx \frac{n_1 \ell}{c} \Delta .$$

7-6- Comparer δt' et δt trouvée dans la première partie (question **6-5-1**). Justifier l'appellation « dispersion intermodale » dans le cas d'une fibre multimode.

Troisième Partie : Dispersion et Atténuation des Ondes Electromagnétiques

Pour tenir compte des pertes d'énergie lors de la propagation de la lumière dans le cœur de la fibre, on étudie l'interaction entre une onde électromagnétique plane progressive monochromatique et un milieu diélectrique *infini*, linéaire, homogène, isotrope (l.h.i) et non magnétique ($\mu = \mu_0$), de faible densité $N \approx 10^{20}$ atomes.m^{-3}. En l'absence de champ électrique, chaque atome possède un moment dipolaire électrique nul.

Modèle d'un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope :

Dans cette étude, on adopte le modèle de l'électron élastiquement lié. Chaque atome comporte un électron mobile de masse m et de charge (-e) soumis, de la part du reste de l'atome supposé *fixe*, à une force de rappel de la forme : $\vec{f}_0 = -m\,\omega_0^2\,\vec{r}$, où ω_0 est la pulsation propre de l'électron et $\vec{r}$ son vecteur déplacement par rapport au centre de l'atome.
Sous l'action du champ électromagnétique, l'électron est soumis, en plus de la force de Lorentz, à une force de frottement visqueux de la forme : $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de l'électron et τ est une constante positive.

8- Que représente τ ? Citer les origines des pertes d'énergie.

9- En supposant que la force magnétique est négligeable devant la force électrique, déterminer l'équation différentielle régissant les variations de $\vec{r}$.

10- Le champ électrique de l'onde qui excite le milieu s'écrit, en notation complexe : $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0(M)\exp(j\omega t)$, où $\underline{E}_0(M)$ représente l'amplitude complexe. Quelle est, en régime *forcé*, la solution de l'équation différentielle obtenue ?

11- Lors du déplacement de l'électron, il y a apparition d'un moment dipolaire $\underline{\vec{p}}$ dépendant du champ excitant $\underline{\vec{E}}(M,t)$. Déduire l'expression complexe du vecteur densité de moment dipolaire électrique induit $\underline{\vec{P}}$ (appelé vecteur polarisation). On posera $\Omega^2 = \dfrac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$.

Propagation dans un milieu diélectrique linéaire homogène isotrope :

12- On s'intéresse, dans la suite, à la propagation d'une onde électromagnétique suivant l'axe Ox. Le champ électrique associé à cette onde s'écrit en notation complexe :
$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \exp j(\omega t - \underline{k}x)\,\vec{u}_z$, où E_0 est un réel positif et $\underline{k}$ à priori complexe.

12-1- Rappeler les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique l.h.i et non magnétique, dépourvu de charges et de courants libres.

12-2- En tenant compte des caractéristiques du milieu diélectrique (l.h.i), établir l'équation aux déviées partielles :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0}\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{P}\right)$$

12-3- Etablir la relation de dispersion : $\underline{k} = f(\omega)$.

12-4- On définit l'indice complexe du milieu $\underline{n}(\omega)$ par : $\underline{n}(\omega) = \dfrac{c\,\underline{k}(\omega)}{\omega}$.

Déterminer $\underline{n}^2(\omega)$.

12-5- On pose : $\underline{n}(\omega) = n'(\omega) - jn''(\omega)$, où $n'(\omega)$ et $n''(\omega)$ sont des réels. Donner leurs significations physiques. Décrire le comportement de l'onde lors de la propagation.

12-6- Dans quel domaine de pulsations, l'atténuation sera-t-elle la plus faible ?

Sachant que $\omega_0 \approx 10^{17}$ rad.s^{-1}, justifier l'utilisation des sources émettant dans le rouge et le proche infrarouge pour transmettre des informations dans une fibre optique.

12-7- On se place dans le domaine visible :

12-7-1- Montrer que l'indice du milieu vérifie la formule simplifiée de Cauchy : $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$, où λ désigne la longueur d'onde dans le vide et a et b sont des constantes à déterminer. Justifier l'utilisation des prismes en verre dans le domaine visible.

12-7-2- Déterminer la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g de l'onde.

PROBLEME N°2 :

Une corde homogène, inextensible, de longueur L et de masse linéique μ, est tendue sous l'action d'une force de tension de norme constante T_0.

Au repos, cette corde est confondue avec l'axe Ox. Lorsqu'elle est excitée, tout point de celle-ci situé en $M_0(x, y = 0)$ au repos se trouve, à l'instant t, en M(x, y) ; l'abscisse x est invariante et l'ordonnée y est fonction de x et de t.

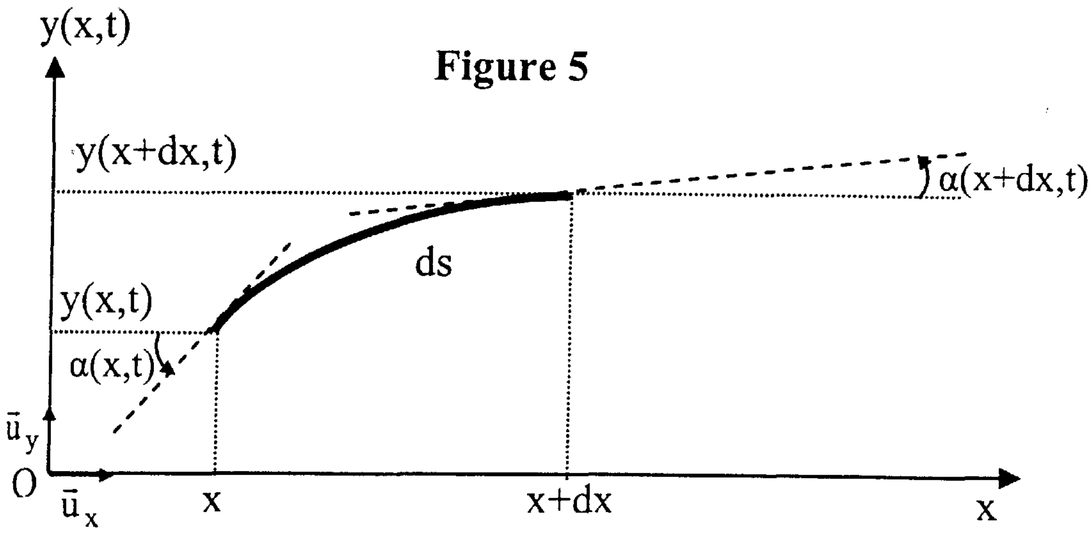
On se limite à l'étude des petits mouvements transversaux de la corde dans le plan Oxy de part et d'autre de sa position d'équilibre.

A l'instant t, les extrémités d'un élément de la corde de longueur curviligne ds et situé entre les abscisses x et x + dx sont soumises aux forces de tension $\vec{T}(x,t)$ et $\vec{T}(x+dx,t)$ respectivement. Ces forces sont tangentes à la corde et font avec l'axe Ox les angles faibles $\alpha(x,t)$ au point extrémité de coordonnées $(x, y(x,t))$ et $\alpha(x+dx,t)$ au point de coordonnées $(x+dx, y(x+dx,t))$, ce qui impose l'approximation $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| << 1$ le long de la corde vibrante (figure 5).

Dans tout le problème, on néglige l'effet de pesanteur.

L'effet de l'amortissement ne sera pris en compte que dans la deuxième partie.

Figure 5



Première Partie : Propagation d'une Onde Mécanique le long d'une Corde Idéale

1- Montrer que, dans l'hypothèse des petits mouvements transversaux, la longueur de l'élément de la corde reste pratiquement inchangée $ds \approx dx$.

2-

2-1- En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un élément de la corde de longueur dx, montrer que la norme de la tension $\vec{T}(x,t)$ est une constante.

2-2- En déduire que le déplacement transversal $y(x,t)$ obéit à l'équation de propagation d'onde :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Exprimer v en fonction de T_0 et μ. Préciser la dimension de v.

2-3- *Application numérique* :
Calculer v pour une corde de nylon de masse M = 2 g, de longueur L = 1,5 m et soumise à la tension $T_0 = 2$ N.

3-

3-1- Montrer que la puissance élémentaire $d\mathcal{P}$ reçue par l'élément ds de la corde pour des petits mouvements transversaux s'écrit :

$$d\mathcal{P} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T_0\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)\right)dx$$

3-2- En utilisant l'équation de propagation, montrer que la puissance linéique reçue par la corde est de la forme :

$$p(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]$$

Que représentent les deux termes de la somme entre crochets ?

3-3- En déduire que p(x,t) vérifie l'équation locale $\operatorname{div}\vec{S}(x,t) + p(x,t) = 0$, où $\vec{S}(x,t)$ est un vecteur qu'on déterminera. Que représente une telle équation ?

4- En faisant un bilan énergétique sur une longueur L de la corde, donner la signification physique de $\vec{S}(x,t)$.

5- Calculer sa valeur moyenne temporelle $<\vec{S}(x,t)>$ pour une vibration progressive harmonique de pulsation ω se propageant à la célérité v.

6- Les extrémités A(x = 0) et B(x = L) de la corde sont fixées. La corde est écartée de sa position d'équilibre et abandonnée à t = 0 en oscillations libres.

6-1- On admet que la solution de l'équation de propagation y(x, t) est de la forme :

$y(x,t) = y_0\cos(kx-\varphi)\cos(\omega t-\psi)$, où φ et ψ sont des constantes.

Décrire la structure de cette onde. Etablir la relation de dispersion.

6-2- En exploitant les conditions aux limites, montrer que les pulsations ω_n des vibrations de la corde sont des multiples d'une pulsation fondamentale ω_1 ($\omega_n = n\,\omega_1$; n entier). Exprimer ω_1 en fonction de T_0, L et μ. Que représentent les différentes valeurs ω_n de la pulsation ?

6-3- Déduire les longueurs d'onde possibles λ_n en fonction de la longueur L de la corde vibrante.

6-4- Exprimer l'élongation transversale $y_n(x,t)$ de la corde fixée à ses extrémités et vibrant à la pulsation ω_n. Préciser le nombre et les positions des nœuds caractérisant la corde vibrante.

Représenter, à un instant t, l'aspect de la corde en mouvement pour : n = 1, n = 2 et n = 3.

6-5- Calculer la valeur moyenne temporelle $<\vec{S}(x,t)>$ relative à cette onde. Commenter.

Deuxième Partie : Effet de l'Amortissement

On suppose maintenant que le milieu dans lequel vibre la corde exerce sur celle-ci une force d'amortissement du type visqueux. Par conséquent, chaque élément ds de la corde, animé d'un mouvement transversal de faible amplitude y(x,t), est soumis à la force d'amortissement $d\vec{f} = -h\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}dx\,\vec{u}_y$, où h est une constante positive.

7- Montrer que le déplacement transversal y(x,t) de la corde obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + b\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = 0 \qquad (E)$$

Exprimer la constante b en fonction de h et μ.

8- On cherche des solutions de la vibration transversale, en notation complexe, sous la forme : $\underline{y}(x,t) = \underline{a}(x)\exp(j\omega t)$

8-1- Etablir l'équation différentielle satisfaite par l'amplitude complexe $\underline{a}(x)$.

8-2- Dans l'hypothèse $h << \omega\,\mu$, montrer que:

$$\underline{a}(x) = a_1 \exp\left((jk+\beta)x\right) + a_2 \exp\left(-(jk+\beta)x\right)$$

Exprimer k et β en fonction de ω, v, h et μ.

8-3- Déterminer, en notation réelle, la solution y(x,t) de l'équation (E) correspondante à des ondes progressives amorties selon les x positifs. Que représente β ?