

Correction de l'épreuve de physique
 Filière : Physico-chimie
 Session : Juin 2006

Barème

Partie I

32

1- $\rho_1(x,t) \ll \rho_0$; $\rho_1(x,t) \ll \rho_0$ et $v(x,t) \ll c$.
 donc ρ_1 , p_1 et \vec{v} sont des infiniment petits
 du premier ordre. (1,5)

-1- $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \text{div}(\rho(x,t) \vec{v}(x,t)) = 0$
 $\Rightarrow \frac{\partial (\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \text{div}((\rho_0 + \rho_1) \vec{v}) = 0$
 le terme $\rho_1 \vec{v}$ est infiniment petit d'ordre 2 qui
 sera négligé ; $\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} = -\rho_0 \text{div} \vec{v}(x,t)$
 d'où : $\boxed{\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}} \quad (1)$



-2- Le signe (-) traduit la diminution de la masse
 dans un volume de contrôle lorsqu'il s'agit d'un
 flux de masse sortant du même volume. (0,5)

-1- Equation d'Euler :
 $\rho(x,t) \cdot \frac{D \vec{v}(x,t)}{Dt} = \rho(x,t) \left(\frac{\partial \vec{v}(x,t)}{\partial t} + (\vec{v}(x,t) \cdot \text{grad}) \vec{v}(x,t) \right)$
 $= - \text{grad} p(x,t)$
 avec $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$ et $p(x,t) = p_0 + p_1(x,t)$. (0,5)

-2- le terme $(\vec{v}(x,t) \cdot \text{grad}) \cdot \vec{v}(x,t)$ est un terme infiniment
 petit d'ordre 2 qu'on néglige.

$$(e_0 + e_1(x,t)) \cdot \frac{\partial \vec{v}(x,t)}{\partial t} \approx e_0 \frac{\partial \vec{v}(x,t)}{\partial t} = - \vec{\text{grad}} p(x,t)$$

enfin :

$$e_0 \frac{\partial \vec{v}(x,t)}{\partial t} = - \vec{\text{grad}} p(x,t)$$

$$\Rightarrow \left| e_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right| \quad (2)$$

$$4- \quad \chi_s = \frac{1}{e} \left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial p(x,t)} \right)_s \approx \frac{1}{e_0} \frac{e_1(x,t)}{p(x,t)}$$

$$\Rightarrow \left| e_1(x,t) = \chi_s e_0 p(x,t) \right| \quad (3)$$

$$5- \quad (3) \text{ dans } (1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\chi_s e_0 p(x,t)) = - e_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_s \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial t} \\ e_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} - \chi_s e_0 \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = 0 \right|$$

$\chi_s e_0$ est homogène à l'inverse
d'une célérité au carré

Equation en $v(x,t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_s \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial t} \\ e_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - e_0 \chi_s \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \right|$$

-1- En comparant les équations obtenues à l'équation de propagation d'Alembert, on trouve $c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_s}$
 $\Rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_s}}$ exprimée en m/s (1)

-2- $c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_s}}$ pour un gaz parfait $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$
 $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1(x,t)}{p_1(x,t)}$
 En présence d'une onde acoustique, un gaz parfait subit une évolution adiabatique et réversible donc isentropique.
 On peut appliquer la loi de Laplace: $pV^\gamma = \text{cte}$
 ou $p \rho^{-\gamma} = \text{cte} \Rightarrow \frac{dp}{\rho^\gamma} - \gamma p \frac{d\rho}{\rho^{\gamma+1}} = 0$ (1,5)
 $\Rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$
 $\chi_s = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{\rho}{\gamma p} = \frac{1}{\gamma p} = \frac{1}{\gamma} \frac{M}{\rho RT} \approx \frac{1}{\gamma} \frac{M}{\rho_0 RT}$
 $c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{\gamma \rho_0 RT}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$
 $C = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \text{ en m/s}$

- A.N $c = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,314 \times 298}{29 \times 10^{-3}}} = 345,8 \text{ m/s}$ (0,5)

7-1- $p_1(x,t)$ traduit une onde acoustique plane progressive harmonique se propageant suivant les x croissants à la célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \kappa_0}}$.
 Le caractère progressif de l'onde se traduit par la dépendance des variables spatiale et temporelle $(t - \frac{x}{c})$ de la fonction d'onde.

7-2- $p_1(x,t)$ présente une double périodicité : spatiale et temporelle.
 λ est la distance traversée par l'onde sinusoïdale pendant la période T lors de la propagation.

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}$$

• Ultrason : $f = 4 \cdot 10^4 \text{ Hz}$ à $T = 298 \text{ K}$

$$c = 345,8 \text{ m/s} \Rightarrow \underline{\lambda = 0,865 \text{ cm}}$$

• Son audible $f = 400 \text{ Hz}$

$$c = 345,8 \text{ m/s} \Rightarrow \underline{\lambda = 0,865 \text{ m}}$$

8-1- $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p_1}{\partial x} \Rightarrow v(x,t) = \frac{1}{\rho_0 c} p_1(x,t)$

$$p_1(x,t) = p_m \cos(\omega t - kx)$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \frac{1}{\rho_0 c} p_m \cos(\omega t - kx) = v_m \cos(\omega t - kx)$$

$$\Rightarrow v_m = \frac{p_m}{\rho_0 c}$$

2. $P_m = 8 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$; $c_{\text{air}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 345,8 \text{ m/s}$.

$V_m = \frac{1}{\rho_0 c} = \frac{1}{1,3 \times 345,8} = 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$

(95)

$P_{\text{max}} = P_m = 8 \cdot 10^{-2} \text{ Pa} \ll P_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

$V_m = 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \ll c = 345,8 \text{ m/s}$

et $l_{\text{max}} = l_m = \lambda_s l_0 P_m = \frac{1}{c^2} P_m \ll l_0$

(115)

$\rho_m = 6,7 \cdot 10^{-7} \text{ kg/m}^3 \ll \rho_0 = 1,3 \text{ kg/m}^3$.

Les approximations acoustiques sont vérifiées.

1. Par définition $\underline{Z} = \frac{P_1(x,t)}{V(x,t)} = \frac{P_m}{V_m} = \rho_0 c$

l'impédance acoustique ne dépend que des caractéristiques du milieu ρ_0 et $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$

(1)

En électricité, $\underline{Z} = \frac{U}{i}$ est le rapport de la tension appliquée à un dipôle (excitation) par le courant qui en résulte (réponse).

A partir d'une analogie électrique-mécanique, l'impédance acoustique est définie par le rapport de l'effort de la pression par la vitesse du fluide.

(1)

$\underline{Z} = \underline{Z}_c = \rho_0 c$

2. $Z(\text{air}) = \rho_0 c = 1,3 \times 345,8 = 449,5 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$

$Z(\text{eau}) = \rho_0 c = \rho_0 \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}} = 1,49 \cdot 10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$

(115)

On remarque que : $Z(\text{air}) \ll Z(\text{eau})$.

$$10-1- \quad dE_c = \frac{1}{2} dm v^2(x,t)$$

c'est l'énergie cinétique relative à une masse élémentaire contenue dans le volume $d\tau$ et animée de la vitesse $v(x,t)$; $dm = \rho(x,t) d\tau$.

$$dE_c = \frac{1}{2} \rho(x,t) v^2(x,t) d\tau = e_c d\tau.$$

$$e_c = \frac{1}{2} \rho(x,t) v^2(x,t) \approx \frac{1}{2} \rho_0 v^2(x,t).$$

l'énergie cinétique volumique $\boxed{e_c = \frac{1}{2} \rho_0 v^2(x,t)}$

$$10-2- \quad e_p = \frac{1}{2} \chi_s p^2(x,t) \text{ avec } p_i = \rho_0 c v$$

$$e_p = \frac{1}{2} \chi_s \rho_0^2 c^2 v^2(x,t) = \frac{1}{2} \rho_0 v^2(x,t)$$

l'énergie mécanique volumique: $e = e_c + e_p$.

$$e = \frac{1}{2} \chi_s p_i^2 + \frac{1}{2} \rho_0 v^2 = \rho_0 v^2(x,t) \text{ en } J m^{-3}$$

$$11-1- \quad e(x,t) = \rho_0 v_m^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

$$\langle e(x,t) \rangle_t = \frac{1}{2} \rho_0 v_m^2 = \frac{1}{2} \chi_s p_m^2$$

11-2- l'énergie acoustique relative à une onde traversant une surface $S \perp$ à la direction de propagation pendant la durée dt est contenue dans un volume, de surface de base S et de hauteur $c dt$: $dE = e d\tau = e \cdot S \cdot c \cdot dt$

$$P = \frac{dE}{dt} = e \cdot S \cdot c : \text{puissance acoustique.}$$

$$\langle P \rangle = S \cdot c \langle e \rangle = S \cdot c \frac{1}{2} \rho_0 v_m^2 = \frac{1}{2} \frac{S}{\rho_0 c} P_m^2$$

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{S}{\rho_0 c} P_m^2} \text{ en Watts}$$

$$1-3 \quad I = \frac{\langle P \rangle}{S} = \frac{1}{S} \frac{\langle dE \rangle}{dt} = \frac{1}{2} \rho_0 v_m^2 c; \quad v_m^2 = \frac{1}{\rho_0 c^2} p_m^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho_0 c}} \quad \text{en Watts/m}^2$$

$$\text{à } T = 293 \text{ K}; \quad c = 345,8 \text{ m/s.}$$

$$I = \frac{1}{2} \frac{64 \cdot (10^{-4})^2}{1,3 \times 345,8} = 7,12 \cdot 10^{-10} \text{ W m}^{-2}.$$

2-1 $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ est l'intensité acoustique de référence. Elle correspond au seuil auditif limite pour une fréquence 1000 Hz.

A.N: $p_m = 8 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}$ et $c = 345,8 \text{ m/s}$ à $T = 298 \text{ K}$

$$I = 7,12 \cdot 10^{-10} \text{ W m}^{-2}$$

$$N(\text{dB}) = 10 \log_{10} \frac{7,12 \cdot 10^{-10}}{10^{-12}} = 28,5 \text{ dB.}$$

$$2 \quad N = 120 \text{ dB} = 10 \log_{10} \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow \log_{10} \frac{I}{10^{-12}} = 12$$

$$\Rightarrow I = 1 = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho_0 c} \Rightarrow p_m = \sqrt{2 \rho_0 c} = 30 \text{ Pa}$$

PARTIE II

$$3-1 \quad P_{1i}(x,t) = p_{1m} \cos(\omega t - k_i x); \quad k_i = \frac{\omega}{c_a} \vec{e}_x$$

$$P_{1r}(x,t) = p_{1r} \cos(\omega t - k_r x); \quad k_r = k_r \vec{e}_x = -\frac{\omega}{c_a} \vec{e}_x$$

$$= p_{1r} \cos(\omega t + \frac{\omega}{c_a} x)$$

$$P_{1t}(x,t) = p_{1t} \cos(\omega t - k_t x); \quad k_t = \frac{\omega}{c_b} \vec{e}_x$$

$$= p_{1t} \cos(\omega t - \frac{\omega}{c_b} x)$$

13-2. Pour une onde harmonique, on a:

$$\rho_{0a} \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial p_{1i}(x,t)}{\partial x} \Rightarrow v_i(x,t) = \frac{1}{\rho_{0a} c_a} p_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c_a} x\right)$$

$$\rho_{0a} \frac{\partial v_r(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial p_{1r}(x,t)}{\partial x} \Rightarrow v_r(x,t) = \frac{-1}{\rho_{0a} c_a} p_{mr} \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c_a} x\right)$$

$$\rho_{0b} \frac{\partial v_t(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial p_{1t}(x,t)}{\partial x} \Rightarrow v_t(x,t) = \frac{1}{\rho_{0b} c_b} p_{mt} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c_b} x\right)$$

14-1. Conservation du débit volumique à travers l'interface S située en $x=0$.

$$q_{V_a}(x=0,t) = q_{V_b}(x=0,t) \Rightarrow v_a(x=0,t) S = v_b(x=0,t) S (*)$$

$$v_a(x=0,t) = v_i(x=0,t) + v_r(x=0,t)$$

$$v_b(x=0,t) = v_t(x=0,t)$$

$$(*) \Rightarrow v_i(x=0,t) + v_r(x=0,t) = v_t(x=0,t)$$

$$\Rightarrow \frac{p_m}{\rho_{0a} c_a} - \frac{p_{mr}}{\rho_{0a} c_a} = \frac{p_{mt}}{\rho_{0b} c_b} \Rightarrow p_m - p_{mr} = \frac{\rho_{0a} c_a}{\rho_{0b} c_b} p_{mt}$$

$$Z_a = \rho_{0a} c_a \text{ et } Z_b = \rho_{0b} c_b$$

$$\Rightarrow \boxed{p_m - p_{mr} = \frac{Z_a}{Z_b} p_{mt}} \quad \text{I}$$

• Continuité de la pression à l'interface
 $p_{1a}(x=0,t) = p_{1b}(x=0,t)$

$$\Rightarrow p_{1r}(x=0,t) + p_{2i}(x=0,t) = p_{2t}(x=0,t)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_m + p_{mr} = p_{mt}} \quad \text{II}$$

$$\text{I} + \text{II} \Rightarrow 2p_m = \left(1 + \frac{Z_a}{Z_b}\right) p_{mt} \Rightarrow \boxed{p_m = \frac{2Z_a}{Z_a + Z_b} p_{mt}}$$

$$P_{mr} = P_{mt} - P_m = \left(\frac{2Z_a}{Z_a + Z_b} - 1 \right) P_m$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{Z_b - Z_a}{Z_b + Z_a}}$$

$$r = \frac{P_{ir}(x=0,t)}{P_{ii}(x=0,t)} = \frac{P_{mr}}{P_m} = \frac{Z_b - Z_a}{Z_b + Z_a}$$

r: Coefficient de réflexion en amplitude de la surpression.

$$t = \frac{P_{it}(x=0,t)}{P_{ii}(x=0,t)} = \frac{P_{mt}}{P_m} = \frac{2Z_b}{Z_a + Z_b}$$

t: Coefficient de transmission en amplitude de la surpression

4-2- D'après la question 1-3, $I = \frac{1}{2} \frac{P_m^2}{\rho_0 c}$

$$\text{donc; } I_i = \frac{1}{2} \frac{P_m^2}{\rho_a c_a}; \quad I_r = \frac{1}{2} \frac{P_{mr}^2}{\rho_a c_a} = \frac{1}{2} \frac{r^2 P_m^2}{\rho_a c_a}$$

$$I_t = \frac{1}{2} \frac{P_{mt}^2}{\rho_b c_b} = \frac{1}{2} t^2 \frac{P_m^2}{\rho_b c_b}$$

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\frac{1}{2} \frac{r^2 P_m^2}{\rho_a c_a}}{\frac{1}{2} \frac{P_m^2}{\rho_a c_a}} = r^2 \Rightarrow R = \frac{(Z_b - Z_a)^2}{(Z_b + Z_a)^2}$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\frac{1}{2} \frac{t^2 P_m^2}{\rho_b c_b}}{\frac{1}{2} \frac{P_m^2}{\rho_a c_a}} = \frac{Z_a}{Z_b} t^2 \Rightarrow T = \frac{4 Z_a Z_b}{(Z_a + Z_b)^2}$$

On montre que $R + T = 1$

Cette relation traduit la conservation de l'énergie à l'interface séparant les deux milieux.

14-3.	<p>• Si $Z_a \ll Z_b$ Cas d'interface air-eau. $R \rightarrow 1$ et $T \rightarrow 0$ l'onde incidente subit une réflexion totale.</p> <p>• Si $Z_a \gg Z_b$ $R \rightarrow 1$ et $T \rightarrow 0$ de même on a une réflexion totale.</p> <p>• Si $Z_a \approx Z_b$ $R \rightarrow 0$ et $T \rightarrow 1$ transmission totale; c'est le cas d'un même milieu</p>	<p>(1)</p> <p>(1)</p>
-------	---	-----------------------

PARTIE III

12 p

15.1	<p>On évalue la masse qui traverse les sections $S(x)$ et $S(x+dx)$ entre les instants t et $t+dt$.</p> <p>$S^2 m_e$: masse entrante dans $d\tau$ pendant dt.</p> $S^2 m_e = \rho(x,t) d\tau = \rho(x,t) \cdot S(x) v(x,t) dt = (\rho_0 + \rho_1(x,t)) S(x) v(x,t) dt$ $= (\rho_0 + \rho_1(x,t)) S(x) v(x,t) dt \approx \rho_0 S(x) \cdot v(x,t) dt$ <p>$S^2 m_s$: masse sortante de $d\tau$ pendant dt.</p> $S^2 m_s = \rho(x+dx,t) S(x+dx) \cdot v(x+dx,t) dt$ $\approx \rho_0 S(x+dx) \cdot v(x+dx,t) dt$ <p>A l'ordre 1 en dx, le volume $d\tau$ est assimilé à un cylindre de hauteur dx et de section $S(x)$ La masse contenue dans $d\tau$ vaut:</p> $dm = \rho(x,t) \cdot S(x) dx = (\rho_0 + \rho_1(x,t)) S(x) dx$ <p>Pendant la durée dt, cette masse varie de:</p> $\frac{d^2 m}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho(x,t) \cdot S(x) dx) = \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} \cdot S(x) dx$	<p>(0,5)</p> <p>(0,5)</p>
------	---	---------------------------

$$d^2 m = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \rho_1(x,t)) S(x) dx dt = \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} S(x) dx dt$$

Le bilan de la matière dans $d\tau$ s'écrit :

$$d^2 m = - (\delta^2 m_A - \delta^2 m_e)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} S(x) dx dt = \rho_0 S(x) v(x,t) dt - \rho_0 S(x+dx) v(x+dx,t) dt$$

$$= \rho_0 dt (v(x+dx,t) S(x+dx) - v(x,t) S(x))$$

$$\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} S(x) dx dt = - \rho_0 dt \frac{\partial}{\partial x} (S(x) v(x,t)) dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} S(x) = - \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} (S(x) v(x,t))} \quad (1)'$$

avec $S(x) = S_0 \exp(\beta x)$

(1)

152. χ_s est le coefficient de compressibilité d'un fluide en évolution isentropique.

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1(x,t)}{p_1(x,t)} \Rightarrow \rho_1(x,t) = \chi_s \rho_0 p_1(x,t)$$

$$\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} = \chi_s \rho_0 \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}$$

$$(1)' \Rightarrow \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} S(x) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} S(x) = - \rho \frac{\partial}{\partial x} (S(x) v(x,t))$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = - \frac{\rho_0 c^2}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x} (S(x) v(x,t))} \quad (2)'$$

(0,5)

(1)

16. On applique le P.F.D à une tranche de fluide contenue dans le pavillon d'épaisseur dx : $\sum \vec{F}_{ext} = dm \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \vec{e}_x$

On néglige la dérivée convective de la vitesse
 $(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}$ puisqu'il est infiniment d'ordre 2.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{pression}}(x,t) + \vec{F}_{\text{pression}}(x+dx,t) + \vec{F}_{\text{pression}}(S \text{ latérale})$$

• $\vec{F}_p(x,t) = p(x,t) \cdot S(x) \cdot \vec{e}_x$: force de pression exercée sur la section $S(x)$.

• $\vec{F}_p(x+dx,t) = p(x+dx,t) \cdot S(x+dx) \cdot \vec{e}_x$: force de pression exercée à la section $S(x+dx)$

• $\vec{F}_p(\text{latérale}) \simeq p(x,t) (S(x+dx) - S(x)) \vec{e}_x$: force de pression exercée sur la surface latérale de la tranche

$$dm \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \vec{e}_x = \rho(x,t) S(x) dx \cdot \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \vec{e}_x$$

$$\simeq \rho_0 S(x) dx \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \vec{e}_x$$

$$\rho_0 S(x) dx \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \vec{e}_x = p(x,t) S(x) \vec{e}_x - p(x+dx) S(x+dx) \vec{e}_x + p(x,t) (S(x+dx) - S(x)) \vec{e}_x$$

Et de limiter à l'ordre 1 en dx

$$\rho_0 S(x) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} dx \simeq (p(x,t) - p(x+dx)) S(x) = - \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} S(x) dx$$

$$\Rightarrow \left[\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right] \textcircled{3}$$

② et ③ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = - \rho_0 \frac{c^2}{S(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (S(x) \cdot v(x,t)) \times \frac{\partial}{\partial t} \\ \rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \frac{dS(x)}{dx} \frac{1}{S(x)} \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = 0 \right]$$

17.1 $f_1(x,t) = p_m \exp(j(\omega t - kx)) ; \frac{dS(x)}{dx} = \beta S(x)$

$\frac{\partial^2 f_1(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 f_1(x,t) ; \frac{\partial f_1}{\partial x} = -jk f_1(x,t) ; \frac{\partial^2 f_1(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 f_1(x,t)$

En remplaçant dans l'équation différentielle établie à la question 16), on obtient:

$-k^2 f_1(x,t) + (-jk)\beta f_1(x,t) - \frac{1}{c^2}(-\omega^2 f_1(x,t)) = 0$

d'où la relation de dispersion:

$k(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - j\beta k$

On cherche à écrire $k(\omega) = k_1 - jk_2$.

(15)

17.2 $k^2 - j\beta k - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

$\Delta = -\beta^2 + 4\frac{\omega^2}{c^2} = 4\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$

• Si $\Delta > 0 \Rightarrow 4\frac{\omega^2}{c^2} > \beta^2 \Rightarrow k(\omega) = -j\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{4\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2}$

$k(\omega) = k_1(\omega) - jk_2(\omega) \Rightarrow k_1(\omega) = \pm\sqrt{4\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2}$ et $k_2(\omega) = \frac{\beta}{2}$

Le signe (+) traduit une propagation suivant les x croissants.

• Si $\Delta < 0 \Rightarrow \beta^2 > 4\frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \Delta = -(\beta^2 - 4\frac{\omega^2}{c^2}) = j^2(\beta^2 - 4\frac{\omega^2}{c^2})$

$k(\omega) = -j\frac{\beta}{2} \pm j\sqrt{\beta^2 - 4\frac{\omega^2}{c^2}}$ imaginaire pure.

Il s'agit d'une onde à caractère évanescente.

(2)

17.3- L'onde acoustique dans le pavillon est progressive avec atténuation si $k_1(\omega) \neq 0$ et $k_2(\omega) \neq 0$
 c. à d $\Delta > 0 \Rightarrow \frac{4\omega^2}{c^2} - \beta^2 > 0 \Rightarrow 4\omega^2 > \beta^2 c^2$
 $\Rightarrow \omega > \frac{1}{2} \beta c = \omega_c$ $\omega_c = \frac{1}{2} \beta c$

c'est la pulsation de coupure

On se place dans le cas où $\omega > \omega_c$

\Rightarrow On a une onde progressive à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{4}\beta^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$

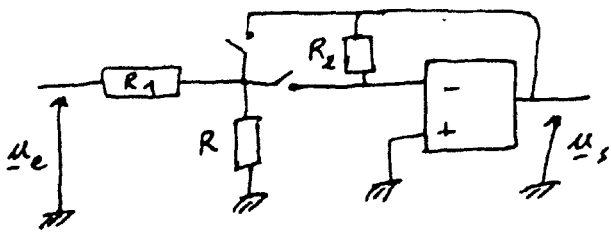
$$\Rightarrow v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} = f(\omega).$$

et $p_1(x,t) = p_m \exp f k''(\omega) x \cos(\omega t - k'(\omega) x)$
 la propagation de l'onde acoustique est réalisée dans un milieu (air + pavillon) vis persif et atténuateur (absorbant)

18- "l'injection" d'une partie du signal de sortie à la borne inverseuse de l'A.O. permet de stabiliser le montage et d'avoir un fonctionnement linéaire de l'A.O.

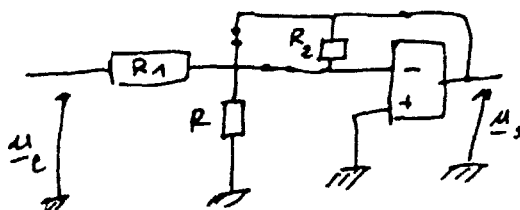
0,5

19. En BF: $Z_c \rightarrow \infty$
de montage est équivalent à:



$u_s = 0 \Rightarrow H(j\omega) = 0$

En HF: $Z_c \rightarrow 0$
de montage est équivalent à:



$u_s = 0 = u_{\oplus} = u_{\ominus} \Rightarrow H(j\omega) = 0$

$H = 0$ lorsque $\omega \rightarrow 0$
 $H = 0$ lorsque $\omega \rightarrow \infty$
 $H \neq 0$ pour $\omega \in]0, \infty[$ } \Rightarrow A priori, c'est un filtre passe-bande.

0,5
+
0,5
+
0,5

20-1-
$$u_A = \frac{u_s/R_2 + u_B j\omega C}{1/R_2 + j\omega C} ; u_B = \frac{j\omega C u_A + j\omega C u_s + u_e/R_1}{2j\omega C + 1/R_1 + 1/R_2}$$

1
+
1

20-2. En combinant les deux équations précédentes, on trouve:

$$H(jx) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{H_0}{1 + j^2 Q (x - 1/x)^2} ; x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$H_0 = -\frac{R_2}{2R_1} ; \omega_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} ; Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}}$$

1,5
+
0,5
+
0,5
+
0,5

20-3- $|H_0|$: gain maximal (pour $x=1$) ; Q : facteur de qualité du circuit ;
 ω_0 : pulsation caractéristique ou propre du circuit.

0,5
+
0,25
+
0,25

21-
$$|H| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 (x - 1/x)^2}} ; \varphi = \pi - \arctan [Q (x - 1/x)]$$

0,5
+
0,5

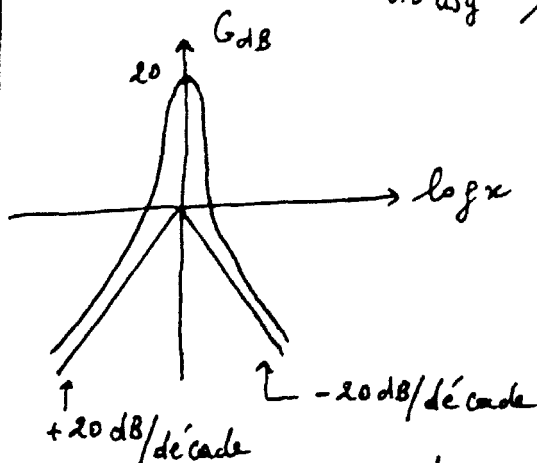
22-1- $G_{dB} = 20 \log |H_0| - 10 \log [1 + Q^2 (x - 1/x)^2]$
• $x \rightarrow 0 (x \ll 1)$; $G_{dB} \rightarrow 20 \log \frac{|H_0|}{Q} + 20 \log x$: pente de 20 dB/décade
• $x \rightarrow \infty (x \gg 1)$; $G_{dB} \rightarrow 20 \log \frac{|H_0|}{Q} - 20 \log x$: pente de -20 dB/décade
• $x = 1$; $G_{dB} = 20 \log |H_0| = G_{dBmax}$
Les deux asymptotes se coupent sur l'axe des ordonnées en $x = 1 (\log x = 0)$
et $G_{dBasy} = 20 \log |H_0|/Q = G_{dBmax} - 20 \log Q$.

1,5

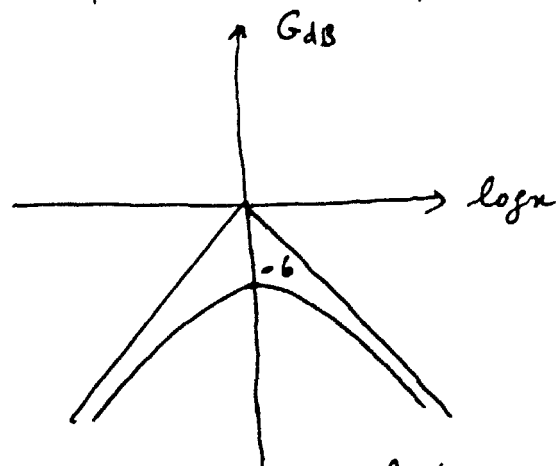
0,5

si $Q > 1 \rightsquigarrow G_{dBasy} < G_{dBmax} \Rightarrow$ filtre sélectif.

si $Q < 1 \rightsquigarrow G_{dBasy} > G_{dBmax} \Rightarrow$ filtre non sélectif.



$|H_0| = Q = 10 \rightsquigarrow$ filtre sélectif



$|H_0| = Q = 0,5 \rightsquigarrow$ filtre non sélectif.

22-2- Il s'agit d'un filtre passe-bande de fréquence centrale $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et de bande passante $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

23-1- $H_0 = -10$; $Q = 5,48$; $\omega_0 = 5216 \text{ rad s}^{-1}$; $f_0 = 830 \text{ Hz}$

23-2- bande passante: $|H(\omega)| = \frac{|H|_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{dB}(\omega) = G_{dBmax} - 3 \text{ dB}$

$$\Rightarrow Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\text{d'où } f_1 = \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}\right] f_0 ; f_2 = \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}\right] f_0$$

A.N $f_1 = 758 \text{ Hz}$ $f_2 = 909 \text{ Hz}$

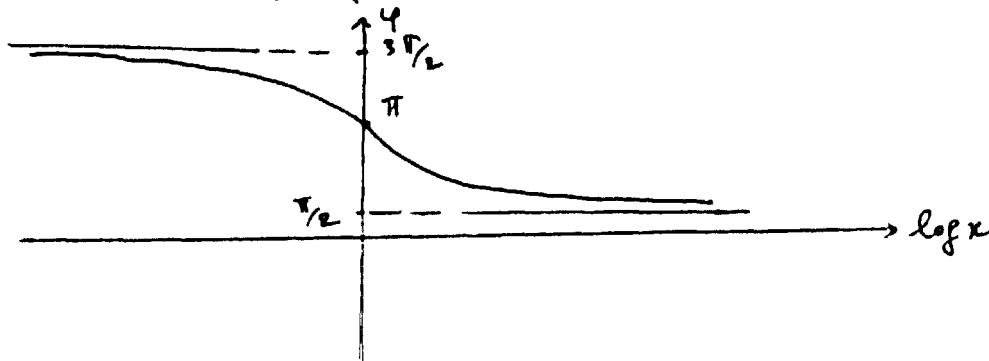
$\Delta f = f_2 - f_1 = 151 \text{ Hz} \rightsquigarrow$ Il s'agit d'un filtre sélectif.

24- $\varphi = \pi - \arctan [Q(x - \frac{1}{x})]$

• $x \rightarrow 0$ ($x \ll 1$) $\rightsquigarrow \varphi \rightarrow \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

• $x \rightarrow \infty$ ($x \gg 1$) $\rightsquigarrow \varphi \rightarrow \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

• $x = 1 \rightsquigarrow \varphi = \pi$



5-1- $u_e(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$

$u_e(t)$ est une fonction impaire $\Rightarrow a_n = 0$; $a_0 = 0$ car $\langle u_e(t) \rangle = 0$

$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_e(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2V_0}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]$

$\left. \begin{aligned} \text{si } n = 2p &\rightarrow b_{2p} = 0 \\ \text{si } n = 2p+1 &\rightarrow b_{2p+1} = \frac{4V_0}{(2p+1)\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_e(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4V_0}{\pi} \frac{\sin[(2p+1)\omega t]}{(2p+1)}$

0,5
+
1,5

5-2-

harmonique	amplitude de u_e	$x = \frac{f}{f_0}$	$ H $	amplitude u_s
1	1,27 V ₀	1	10	12,7 V ₀
3	0,42 V ₀	3	0,68	0,28 V ₀
5	0,25 V ₀	5	0,38	0,09 V ₀

d'où $u_s(t) \approx \frac{4V_0}{\pi} |H(\omega=\omega_0)| \cdot \sin(\omega_0 t + \pi)$

$\Rightarrow u_s(t) = -\frac{40}{\pi} V_0 \sin(\omega t)$

Les harmoniques d'ordre > 1 sont fortement atténuées. Leurs fréquences se trouvent en dehors de la bande passante.

1,5
+
0,5

5-3-1 il faut que $f_0 = 3f \Rightarrow c = \frac{1}{2\pi \cdot 3f} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R}}$

A.N. $c = 7 \text{ mF}$.

0,5
+
0,5

5-3-2-

harmonique	amplitude u_e	$x = \frac{f}{f_0}$	$ H $	amplitude u_s
1	1,27 V ₀	1/3	0,68	0,86 V ₀
3	0,42 V ₀	1	10	4,2 V ₀
5	0,25 V ₀	5/3	1,68	0,42 V ₀

d'où $u_s(t) = -\frac{8V_0}{\pi} \sin(3\omega t)$

∴

1
+
0,5