REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministere de l'Enseignement Supérieur
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2006

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2006

# Concours Physique et Chimie
# Epreuve de Mathématiques



---

**Durée :** 4 H **Date :** 05 Juin 2006 **Heure :** 8 H **Nb pages :** 5

**Barème :** Exercice : 4 pts. Problème : Partie I : 6 pts. Partie II : 10 pts.

---

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

## Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note $M_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $I_n$ la matrice identité.

Pour toute matrice $M$ de $M_n(\mathbb{C})$, on désigne par $P_M$ le polynôme caractéristique de $M$ et par $Sp(M)$ le spectre de $M$.

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On note $J$ et $A$ les matrices de $M_n(\mathbb{C})$ définies par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \cdots & \cdots & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

On désigne par $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à $J$.

**1.a.** Soit $k$ un élément de $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Montrer que $u^p(e_k) = \begin{cases} e_{k+n-p} & \text{si } 1 \le k \le p \\ e_{k-p} & \text{si } p < k \le n \end{cases}$ pour tout $p = 1, 2, \ldots, n-1$,

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

**1.b.** Montrer que $J^n = I_n$ et que $A = a_0 I_n + a_1 J + \ldots + a_{n-1} J^{n-1}$.

**2.a.** Montrer que la famille $(I_n, J, \ldots, J^{n-1})$ est libre.

**2.b.** Montrer qu'il n'existe pas de polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ annulant $J$.

**2.c.** En déduire que $Sp(J) = \left\{\omega^k, k = 0, \cdots, n-1\right\}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$,

et que $P_J(X) = (-1)^n (X^n - 1)$.

**3.** Diagonaliser $J$ puis $A$.

**4.** On suppose que $a_k = k+1$, $k = 0, \ldots, n-1$.
Calculer le déterminant de la matrice $A$.

# Problème

On note $E$ le $\mathbb{R}$- espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ constitué des applications polynomiales, pour tout entier naturel $n$, on note $F_n$ le sous-espace vectoriel de $E$ des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à $n$.
Les éléments de $F$ peuvent aussi être considérés comme des polynômes.

On désigne par $T$ et $\theta$ les endomorphismes de $E$ définis par :

$$\forall f \in E \text{ et } \forall x > 0, \; T(f)(x) = f(x+1) - f(x) \text{ et } \theta(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

## Partie I

**I.1.1.** Montrer que $F$ est stable par $T$.

**I.1.2.** Pour $P \in F$, calculer le degré de $T(P)$ en fonction du degré de $P$.

**I.2.** On note $\Delta$ l'endomorphisme de $F$ induit par $T$.

**I.2.1.** Montrer que le noyau de $\Delta$ est égal à $F_0$.

**I.2.2.** Montrer que $\Delta$ admet une unique valeur propre.
Quel est le sous-espace propre associé ?

**I.3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**I.3.1.** Montrer que l'image par $\Lambda$ de $F_n$ est égal à $F_{n-1}$.

**I.3.2.** Soit $G_n = \{ P \in F_n ,\ P(0) = 0 \}$.

Montrer que $\Lambda$ réalise un isomorphisme de $G_n$ sur $F_{n-1}$.

**I.3.3.** Déterminer $A \in F_4$ de sorte que pour tout $x \in ]0,+\infty[$,
$A(X+1) - A(X) = X^3$ et $A(0) = 0$.

En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

**I.4.** On note $C_1$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 1-périodiques sur $\mathbb{R}_+^*$

**I.4.1.** Déterminer $\operatorname{Ker} T$.

**I.4.2.** Montrer que $f \in \operatorname{Ker}\theta \Leftrightarrow f \in \operatorname{Ker} T$ et $\theta(f)(1) = 0$.

**I.4.3.** On munit $C_1$ du produit scalaire $\langle \,.\, / \,.\, \rangle$ défini par

$$\langle f / g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \text{ , pour tous } f \text{ et } g \text{ éléments de } C_1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $e_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$e_n(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi n t)$.

Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormale de $\operatorname{Ker} T$.

$\operatorname{Ker} T$ est-il de dimension finie ?

**I.5.1.** Soient $f$ et $g$ deux éléments de E.
Montrer que si $T(f) = g$ alors pour tout entier naturel $n$ non nul
et pour tout $x$ de $]n, n+1]$, $f(x) = f(x-n) + \sum\limits_{i=1}^{n} g(x-i)$.

**I.5.2.** En déduire que $T$ est surjectif.
On pourra considérer d'abord le cas où $g$ est prolongeable en 0.

**I.5.3.** Montrer que $\theta(f)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\theta$ est-il surjectif ?
Déterminer l'image de $\theta$.

## Partie II

**II.1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \geq 0 \ ,\ u_n(x) = \frac{x}{n} - \operatorname{Log}\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

**II.1.1.** Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Dans toute la suite du problème, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est notée $S$ et $\gamma$ désigne la valeur de $S(1)$.

**II.1.2.** Montrer que $S$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall x \geq 0 \;,\; S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

**II.1.3.** On se propose de calculer $\theta(S)(1)$.

**II.1.3.1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N}\theta(u_n)(1) = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N}u_n(1) + \frac{3}{2}\operatorname{Log}(N+1) + 2\operatorname{Log}2 + \operatorname{Log}(N!) + N - (N+2)\operatorname{Log}(N+2).$$

**II.1.3.2.** En déduire que $\theta(S)(1) = \frac{3}{2}\gamma - 2\operatorname{Log}2 + \operatorname{Log}\sqrt{2\pi} - 2$.

On rappelle la formule de Stirling : $N! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi N}\, e^{-N} N^N$.

**II.2.** On se propose de montrer qu'il existe un unique élément $f$ de $E$ vérifiant :

$$(1)\quad \begin{cases} \forall x \in \left]0,+\infty\right[ \;,\; \theta(f)(x) = \operatorname{Log}(x) \\ f \text{ est croissante sur } \left]0,+\infty\right[. \end{cases}$$

**II.2.1.** On suppose qu'il existe deux éléments $f_1$ et $f_2$ de $E$ vérifiant $(1)$ et on note $\delta = f_1 - f_2$.

**II.2.1.1.** Prouver que $\delta \in \operatorname{Ker}\theta$.

En déduire que pour tout $x \in \left]0,1\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\delta(x) = \delta(x+n) \quad \text{et} \quad \delta(n) = \delta(1).$$

**II.2.1.2.** Montrer que pour tout $x \in \left]0,1\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\frac{1}{n} \leq \delta(x) - \delta(1) \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire que $f_1 = f_2$.

**II.2.2.** Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + S'(x)$ est l'unique élément de $E$ vérifiant $(1)$.

**II.3.** On se propose de montrer qu'il existe un unique élément $g$ de $E$ vérifiant :

$$(2)\quad \begin{cases} \forall x \in \left]0,+\infty\right[ \;,\; \theta(g)(x) = x\operatorname{Log}(x) - x + \operatorname{Log}\sqrt{2\pi} \\ g(1) = 0 \\ g \text{ est } C^1 \text{ sur } \left]0,+\infty\right[ \text{ et } g' \text{ est croissante sur } \left]0,+\infty\right[. \end{cases}$$

**II.3.1.** Montrer que si $g$ vérifie $(2)$ alors $g'$ vérifie $(1)$.

**II.3.2.** Montrer que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = -\gamma x - \operatorname{Log}x + S(x)$ est l'unique élément de $E$ vérifiant $(2)$.

**II.4.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $\psi_n$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x > 0, \ \psi_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

**II.4.1.** Montrer que $\forall x > 0$, $\operatorname{Log}(\psi_n(x))$ tend vers $g(x)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**II.4.2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $I_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt.$$

**II.4.2.1.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $I_n$.

**II.4.2.2.** Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in ]0,+\infty[$,

$$n^x I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

**II.4.2.3.** Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

En déduire l'expression de $I_n(x)$ en fonction de $n$ et de $x$.

**II.5.** On considère la fonction $\Gamma$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

**II.5.1.** Montrer que la fonction $\Gamma$ est $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et que

$$\forall x > 0, \ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Log}(t) e^{-t} t^{x-1} dt.$$

**II.5.2.** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x)$.

En déduire que $\Gamma(x) = \exp(g(x))$.

**II.5.3.** Montrer que pour tout $x \in ]0,+\infty[$,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + S'(x).$$

**II.5.4.** Montrer que pour tout $x \in ]0,1[$,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right).$$

**II.5.5.** On admet que l'on peut intervertir dans la formule précédente les deux sommations.

**II.5.5.1.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \zeta(k+1)\, x^k \quad \text{où } \zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}.$$

**II.5.5.2.** Prouver que pour tout $x \in ]0,1[$,

$$\Gamma(x+1) = \exp\left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k)\right).$$

**II.5.6.** Démontrer alors que $\int_0^{+\infty} \operatorname{Log}(t) e^{-t} dt = -\gamma$.