Concours en Physique et Chimie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 08 Juin 2006	Heure : 8 H 00	Durée : 4 H	Nbre pages : 06
Barème : Partie I : 08 pts ;	Partie II : 03 pts ;	Partie III : 03 pts ;	Partie IV : 06 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé

L'épreuve est constituée de quatre parties. Les parties III et IV peuvent être traitées indépendamment.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Dans la totalité de l'épreuve, l'espace est rapporté à un référentiel galiléen $\mathfrak{R}_0(Oxyz)$ de base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On s'intéresse à la propagation unidimensionnelle suivant l'axe Ox des ondes acoustiques dans un fluide supposé parfait.

Dans le référentiel $\mathfrak{R}_0$, le fluide au repos est caractérisé par des champs de pression P_0 et de masse volumique ρ_0 uniformes. La présence d'une onde acoustique dans le milieu crée une perturbation. Ainsi les champs, définis précédemment, deviennent :

$$P(x,t) = P_0 + p_1(x,t) \qquad ; \qquad \rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t) \;;$$

$p_1(x,t)$ définit la surpression et $\rho_1(x,t)$ est la modification de la masse volumique du fluide.
On désigne par $\vec{v}(x,t) = v(x,t)\vec{e}_x$ le champ de vitesses dans le fluide.

Dans toute l'épreuve, on suppose que l'écoulement du fluide est irrotationnel, isentropique et on néglige l'influence de la pesanteur.

On rappelle que le coefficient de compressibilité isentropique s'écrit : $\chi_S = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$.

Partie I : Onde acoustique progressive

1- Rappeler en quoi consiste l'approximation acoustique.

<u>*Dans tout le problème, cette approximation sera prise en compte.*</u>

2-

2-1- Rappeler l'équation locale de conservation de la masse. En déduire la relation liant ρ_0, $\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t}$, qu'on notera (1).

2-2- Commenter le signe $(-)$ qui apparaît dans cette relation.

3-

3-1- Rappeler l'équation vectorielle d'Euler décrivant le mouvement d'une particule fluide en absence de forces volumiques extérieures.

3-2- Déduire la relation liant $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}$ et ρ_0, qu'on notera (2).

4- Etablir la relation liant $\rho_0, \chi_S, \rho_1(x,t)$ et $p_1(x,t)$, qu'on notera (3).

5- En combinant les relations (1), (2) et (3), montrer que les équations de propagation en $v(x,t)$ et en $p_1(x,t)$ peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

où g désigne l'une des grandeurs citées.

6-

6-1- Déduire de ce qui précède l'expression de la célérité c de l'onde acoustique en fonction des caractéristiques du milieu ρ_0 et χ_S.

6-2- Etablir l'expression de c dans le cas d'un gaz parfait de température T_0 et de masse molaire M. On désigne par R la constante des gaz parfaits et par γ le rapport des capacités thermiques isobare et isochore $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

6-3- Calculer la célérité c de l'onde acoustique dans l'air.
On donne : $M = 29\ \mathrm{g\ mol^{-1}}$; $T_0 = 298\ \mathrm{K}$; $R = 8{,}31\ \mathrm{J\ K^{-1}\ mol^{-1}}$ et $\gamma = 1{,}4$.

7- On place à l'origine O du référentiel $\Re_0$ un émetteur acoustique produisant une surpression sinusoïdale de la forme : $p_1(0,t) = p_m \cos(\omega t)$. L'onde correspondante en tout point M d'abscisse x et à un instant t s'écrit :

$$p_1(x,t) = p_m \cos(\omega t - kx) \quad ; \qquad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

7-1- Caractériser l'onde décrite par la surpression $p_1(x,t)$.

7-2- Définir la longueur d'onde λ correspondante.
Calculer sa valeur dans l'air à la température 25°C pour un ultrason de fréquence f = 40 kHz puis pour un son audible de fréquence f = 400 Hz.

8-

8-1- En utilisant la relation (2), établie à la question 3-, exprimer le champ de vitesses $v(x,t)$ des particules fluide en fonction de la surpression $p_1(x,t)$.
Exprimer la valeur maximale v_m de $v(x,t)$ en fonction de ρ_0, c et p_m.

8-2- Calculer la valeur de v_m à la température 25°C lorsque la surpression $p_m = 8\ 10^{-2}$ Pa.
On donne : $\rho_0(\text{air}) = 1{,}3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$.
L'approximation acoustique est-elle vérifiée ? Justifier.

9- Pour l'unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation, on définit, en notation complexe, l'impédance acoustique du milieu par la relation : $\underline{Z} = \frac{\underline{p}_1(x,t)}{\underline{v}(x,t)}$.

9-1- Justifier cette définition en la comparant à celle définie en électricité.
Exprimer $\underline{Z}$ en fonction de c et ρ_0. Commenter le résultat.

9-2- Calculer la valeur de $Z = |\underline{Z}|$ pour l'air et pour l'eau à la température 25°C.
On donne pour l'eau : $\rho_0 = 10^3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$ et $\chi_S = 4{,}5\ 10^{-10}\ \mathrm{Pa^{-1}}$.

10-

10-1- Exprimer l'énergie cinétique volumique e_c du fluide en fonction de $v(x,t)$ et de ρ_0.

10-2- On définit la densité volumique d'énergie potentielle e_p par : $e_p = \frac{1}{2}\chi_S\, p_1^2(x,t)$.

Déduire la densité volumique de l'énergie acoustique totale e en fonction de ρ_0 et $v(x,t)$.

11-

11-1- Déterminer la moyenne temporelle de la densité volumique de l'énergie acoustique $<e>$ en fonction de v_m et ρ_0.

11-2- En admettant que l'énergie acoustique se propage à la célérité c, déduire la moyenne temporelle $<\mathcal{P}>$ de la puissance transmise par l'onde acoustique à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation en fonction de S, p_m, ρ_0 et c.

11-3- On définit l'intensité acoustique I par : $I = \frac{<\mathcal{P}>}{S}$.

Calculer I dans le cas de l'air à la température 25°C pour une surpression maximale $p_m = 8\ 10^{-2}$ Pa et une masse volumique $\rho_0(\text{air}) = 1{,}3\ \text{kg m}^{-3}$.

12- On définit le niveau sonore, exprimé en décibels (dB), par la relation :

$$N = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{où} \quad I_0 = 10^{-12}\ \text{W m}^{-2}.$$

12-1- Que représente I_0 ?

Calculer le niveau sonore correspondant à la valeur numérique de I de la question **11-3-**.

12-2- Quelle est la valeur de l'amplitude de la surpression p_m correspondant à un seuil de niveau sonore dit de « douleur » évalué à 120 dB ?

Partie II : Réflexion et transmission d'une onde acoustique

On suppose maintenant que l'onde acoustique plane progressive harmonique précédente $p_{1i}(x,t) = p_m\cos(\omega t - k_i x)$ atteint une surface, confondue avec le plan x = 0, et séparant deux milieux (a) et (b). Elle donne naissance à une onde réfléchie $p_{1r}(x,t)$ dans le milieu (a) et une onde transmise $p_{1t}(x,t)$ dans le milieu (b) (Figure 1).

On désigne par c_a et c_b les célérités des ondes acoustiques et par ρ_{0a} et ρ_{0b} les masses volumiques des milieux (a) et (b) respectivement.

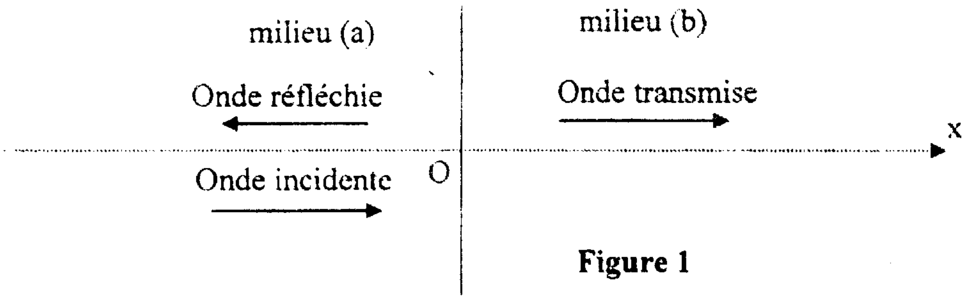

Figure 1

13-

13-1- Ecrire les expressions générales des surpressions réfléchie $p_{1r}(x,t)$ et transmise $p_{1t}(x,t)$.

13-2- En exploitant les résultats de la question **8-1-**, déduire les expressions des vitesses particulaires $v_r(x,t)$ et $v_t(x,t)$.

14-

14-1- En utilisant la conservation du débit volumique et la continuité de la surpression à l'interface séparant les deux milieux, déterminer le coefficient de réflexion en amplitude $r = \frac{p_{1r}}{p_{1i}}$ ainsi que le coefficient de transmission en amplitude $\tau = \frac{p_{1t}}{p_{1i}}$ en fonction des impédances acoustiques Z_a et Z_b des deux milieux.

14-2- Exprimer le facteur de réflexion en énergie $\mathcal{R}$, (rapport des puissances réfléchie et incidente) ainsi que le facteur de transmission en énergie $\mathcal{T}$ (rapport des puissances transmise et incidente) en fonction des impédances acoustiques Z_a et Z_b.
Quelle relation simple vérifient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$? Conclure.
14-3- Etudier les cas limites de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$. Commenter.

Partie III : Dispersion d'une onde sonore dans un pavillon exponentiel

On se propose d'étudier la propagation d'une onde sonore plane suivant la direction (Ox) dans un volume limité d'air par une surface de révolution d'axe (Ox) et de section S variable suivant la loi exponentielle :

$$S(x) = S_0 \exp(\beta x),$$ où S_0 et β sont des constantes (Figure 2).

En l'absence d'ondes sonores dans le pavillon, la pression P_0 et la masse volumique ρ_0 de l'air dans le pavillon sont uniformes. L'air est caractérisé par le coefficient de compressibilité isentropique χ_s. On désigne par c la célérité de l'onde sonore dans l'air.

Le fluide est décrit toujours par les champs de pression $P(x,t)$ et de masse volumique $\rho(x,t)$ définies précédemment. En supposant que le mouvement du fluide est unidirectionnel, le champ de vitesses du fluide dans le pavillon s'écrit : $\vec{v}(x,t) = v(x,t)\vec{e}_x$.
La propagation de l'onde sonore est étudiée dans le cadre de *l'approximation acoustique*.

15-

15-1- En effectuant un bilan de matière pendant dt sur le volume $d\tau$ limité par les sections $S(x)$ et $S(x+dx)$ (Figure 2), établir une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants reliant $v(x,t)$ à la modification de la masse volumique $\rho_1(x,t)$.

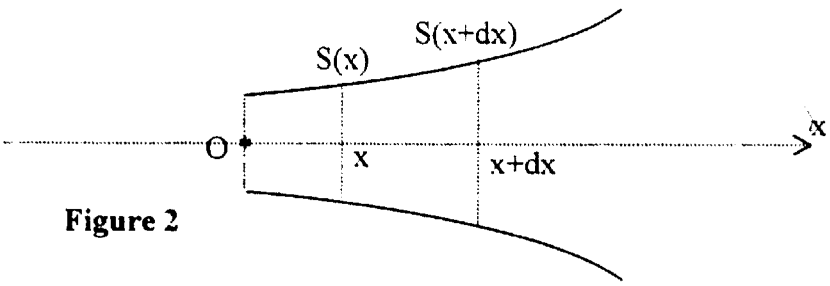

Figure 2

15-2- En utilisant l'hypothèse d'évolution isentropique, établir la relation :

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{\rho_0 c^2}{S(x)} \frac{\partial [S(x)\, v(x,t)]}{\partial x}$$, où $p_1(x,t)$ est la surpression.

16- Montrer, par application de la loi fondamentale de la dynamique à une tranche de fluide d'épaisseur dx, qu'on obtient l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}.$$

En déduire l'équation de propagation de l'onde sonore dans le pavillon :

$$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{S(x)}\frac{dS(x)}{dx}\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = 0.$$

17- Dans le cas où l'excitation de l'air dans le pavillon en x = 0 est sinusoïdale de pulsation ω et en négligeant l'onde de retour, la surpression $p_1(x,t)$ que subit l'air en présence de l'onde sonore s'écrit, en notation complexe : $\underline{p_1}(x,t) = p_m \exp(j(\omega t - \underline{k}x))$,

où $\underline{k}$ est le nombre d'onde complexe $\underline{k} = k_1 - jk_2$ (k_1 et k_2 sont réels).

17-1- Déterminer la relation de dispersion caractérisant le milieu.

17-2- Déterminer les expressions possibles de $\underline{k}$ en fonction de ω, c et β.

17-3- En déduire qu'il n'y a propagation de l'onde acoustique que si ω est supérieure à une pulsation de coupure ω_c. On exprimera ω_c en fonction de c et β.

Donner dans ce cas l'expression de $p_1(x,t)$ et de la vitesse de phase de l'onde de pression. Conclure.

Partie IV : Principe de l'analyse fréquentielle d'un signal sonore

Pour analyser les composantes fréquentielles d'un signal sonore, on utilise un microphone qui convertit ce signal en une tension électrique u_e. Un filtre permet, ensuite, d'extraire les composantes sinusoïdales de u_e par un choix judicieux de la fréquence f_0 caractéristique du filtre.

Dans cette partie, on étudie un montage ayant une structure dite de *Rauch*. Cette structure constitue un exemple particulier d'une famille de montages, qui selon le choix des impédances permettent d'obtenir pratiquement tous les filtres du second ordre.

Dans toute cette partie, l'amplificateur opérationnel est supposé idéal.

On réalise le montage de la figure 3 dans lequel l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire.

Les impédances utilisées sont réalisées par des résistances ohmiques R, R_1 et R_2 et par deux condensateurs identiques de capacité C.

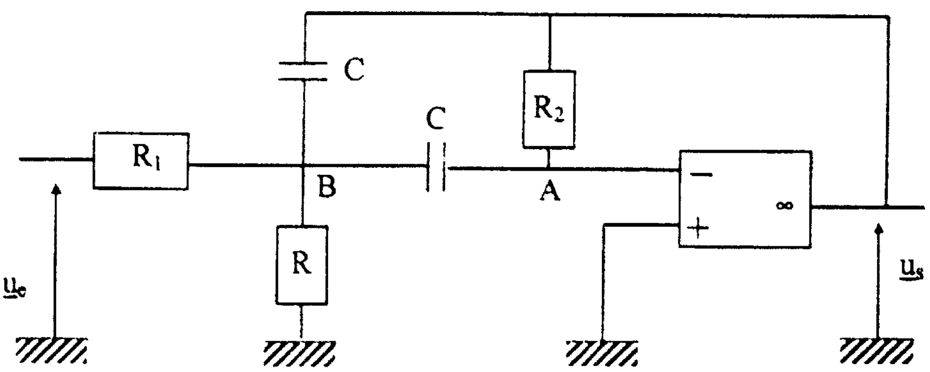

Figure 3

18- Justifier le fonctionnement en régime linéaire de ce montage.

19- Décrire qualitativement le comportement du circuit en basses fréquences et en hautes fréquences.

En déduire la nature de la fonction réalisée par ce circuit.

20- La tension d'entrée est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω, notée $\underline{u}_e$ en notation complexe. De même $\underline{u}_s$ désigne la tension de sortie en notation complexe.

20-1- Déterminer les tensions aux points A et B.

20-2- Montrer que la fonction de transfert de ce circuit peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

Dans cette expression H_0 est une fonction réelle et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Exprimer H_0, Q et ω_0 en fonction de C, R, R_1 et R_2.

20-3- Donner la signification de H_0, Q et ω_0.

21- Déterminer le module $|\underline{H}|$ de la fonction de transfert, ainsi que sa phase φ.

22- On définit le gain en décibel du montage par $G_{dB} = 20\log_{10}\left(|\underline{H}|\right)$.

22-1- Tracer le diagramme de Bode pour le gain (G_{dB} en fonction de $\log_{10}(x)$).
Préciser la pente de chaque asymptote et les coordonnées de leurs points d'intersection suivant la valeur de Q.

22-2- Retrouver la nature de la fonction réalisée par ce circuit.

23- On se place dans le cas où C = 21 nF, R = 1 kΩ, R_1 = 5 kΩ, R_2 = 100 kΩ.

23-1- Calculer les valeurs numériques de H_0, Q, ω_0 et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

23-2- Définir puis déterminer la bande passante du circuit. Commenter.

24- Tracer le diagramme de Bode pour la phase ($\varphi = 20\log_{10}(x)$).

25- On envoie à l'entrée un signal carré de fréquence f = 830 Hz (Figure 4).

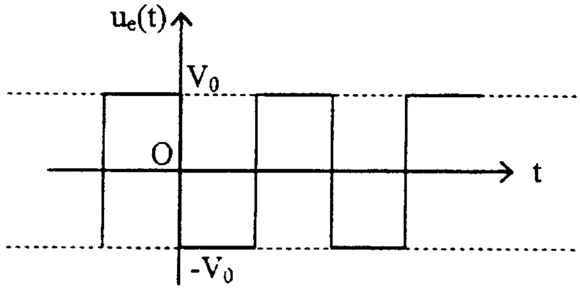

Figure 4

25-1- En utilisant la décomposition en série de Fourier, montrer que :

$$u_e(t) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2p+1)\omega t\right]}{(2p+1)}$$

25-2- Exprimer les amplitudes des tensions de sortie correspondant aux harmoniques d'ordres 1, 3 et 5 en fonction de V_0. En déduire l'expression de $u_s(t)$.

25-3-

25-3-1- Quelle est la valeur de la capacité C pour que f_0 corresponde à la fréquence de l'harmonique d'ordre 3 ?

25-3-2- Déterminer dans ce cas l'expression de $u_s(t)$.

FIN DE L'EPREUVE