

Correction du Concours Physique Chimie

Epreuve de Mathématiques

Session : Juin 2007



Partie I

I.1. $f: x \rightarrow (1+x)^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est continue sur $] -1, 1 [$

Au $V(1)$, $f(x) \sim \frac{2^{a-1}}{(1-x)^{1-b}} \in L^1([0, 1[)$ ssi $1-b < 1$ ssi $b > 0$.

Au $V(-1)$, $f(x) \sim \frac{2^{b-1}}{(1+x)^{1-a}} \in L^1(]-1, 0])$ ssi $1-a < 1$ ssi $a > 0$.

Conclusion : $I_{a,b}$ existe ssi $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

I.2. Par le changement de variable $t = \frac{1+x}{2}$, il vient que $I_{a,b} = 2^{a+b-1} \beta(a,b)$.

I.3.1. Par le changement de variable $u = 1-t$, il vient que $\beta(a,b) = \beta(b,a)$.

I.3.2. $\beta(a+1,b) + \beta(a,b+1) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}(t+1-t) dt = \beta(a,b)$.

I.3.3. Une intégration par parties donne $b \beta(a+1,b) - a \beta(a,b+1) = 0$.

I.3.4. I.3.2. et I.3.3. donnent $\beta(a+1,b) = \frac{a}{a+b} \beta(a,b)$.

I.3.5.
$$I_{a+1,b+1} = 2^{a+b+1} \beta(a+1,b+1) = \frac{a}{a+b+1} 2^{a+b+1} \beta(a,b+1)$$

$$= \frac{a}{a+b+1} 2^{a+b+1} \beta(b+1,a) = \frac{b}{a+b} \frac{a}{a+b+1} 2^{a+b+1} \beta(b,a)$$

$$= \frac{b}{a+b} \frac{a}{a+b+1} 4 \cdot 2^{a+b-1} \beta(a,b) = \frac{4ab}{(a+b)(a+b+1)} I_{a,b}$$

I.3.6. $I_{n+1,n+1} = \frac{4n^2}{(2n)(2n+1)} I_{n,n}$ et $I_{1,1} = 2$, il vient donc par récurrence

$$I_{n+1,n+1} = \frac{2 \cdot 4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

I.4.1. $n^a \beta(a, n+1) = n^a \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^n dt$, on pose $u = nt$.

$$= \int_0^n u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = \int_0^{+\infty} u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \chi_{]0,n]} du.$$

On pose $f_n(u) = u^{a-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \chi_{]0,n]}$. f_n continue sur \mathbb{R}_+^* et converge simplement vers $f: u \rightarrow u^{a-1} e^{-u}$ continue sur \mathbb{R}_+^* .

De plus, $|f_n| \leq f(u) \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ donc d'après le théorème de convergence dominée, il vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a \beta(a, n+1) = \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du = \Gamma(a)$.

I.4.2. $n^b \beta(a+n+1, b) = n^b \beta(b, a+n+1) = n^b \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{n+a} dt$, on pose $u = nt$.

$$= \int_0^n u^{b-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n+a} du = \int_0^{+\infty} u^{b-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n+a} \chi_{]0,n]} du.$$

On pose $g_n(u) = u^{b-1} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n+a} \chi_{]0,n]}$. g_n continue sur \mathbb{R}_+^* et converge simplement vers $g: u \rightarrow u^{b-1} e^{-u}$ continue sur \mathbb{R}_+^* .

De plus, $|g_n| \leq g(u) \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ donc d'après le théorème de convergence dominée, il vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^b \beta(a+n+1, b) = \int_0^{+\infty} u^{b-1} e^{-u} du = \Gamma(b)$.

I.4.3. Par des intégrations par parties successives, il vient que :

$$\beta(a, n+1) = \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)}, \quad \beta(a+b, n+1) = \frac{n!}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+n)}$$

$$\beta(a+n+1, b) = \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+n)} \beta(a, b).$$

$$\text{D'où : } \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a \beta(a, n+1) \cdot n^b \beta(a+n+1, b)}{n^{a+b} \beta(a+b, n+1)} = \beta(a, b).$$

I.4.4. Pour $a = b = \frac{1}{2}$, $(\Gamma(\frac{1}{2}))^2 = \beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$ et donc $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Partie II

II.1.1. Par le changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$, il vient que

$$\beta(a, 1-a) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{-a} dt = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-a}(1+u)}.$$

II.1.2. $\beta(a, 1-a) = \int_0^1 \frac{du}{u^{1-a}(1+u)} + \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{1-a}(1+u)}.$

Par le changement de variable $v = \frac{1}{u}$, il vient que

$$\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{1-a}(1+u)} = \int_0^1 \frac{dv}{v^a(1+v)} = J(1-a).$$

D'où $\beta(a, 1-a) = J(a) + J(1-a)$ où $J(a) = \int_0^1 \frac{du}{u^{1-a}(1+u)}.$

II.1.3. $\frac{1}{u^{1-a}(1+u)} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(u)$ où $h_k(u) = (-1)^k u^{k-1+a}.$

h_k est continue, $h_k \in L^1(]0, 1[)$, $\sum h_k$ converge simplement sur $]0, 1[$ est sa somme est continue. Pour tout entier n ,

$$\left| \sum_{k=0}^n h_k(u) \right| = \left| \frac{1 - (-u)^{n+1}}{u^{1-a}(1+u)} \right| \leq \frac{1+u^{n+1}}{u^{1-a}(1+u)} \leq \frac{u}{u^{1-a}(1+u)} \leq \frac{1}{u^{1-a}} \in L^1(]0, 1[).$$

D'où d'après le théorème de convergence dominée,

$$J(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 h_k(u) du = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} h_k(u) du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+a}.$$

II.1.4. $\beta(a, 1-a) = J(a) + J(1-a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-a}$

$$= \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}.$$

II.2.1. f_a étant paire $b_n(f_a) = 0$, et $a_n(f_a) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(at) \cos(nt) dt$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos[(a+n)t] + \cos[(a-n)t]) dt = (-1)^n \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right)$$

$$= \frac{2a \sin(a\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}.$$

D'où SF (f_a) (t) = $\frac{\sin(a\pi)}{\pi} \left[\frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nt)}{a^2 - n^2} \right]$.

f_a est continue, 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux donc la série de Fourier converge normalement sur \mathbb{R} et admet f_a pour somme.

II.2.2. Pour $t = 0$, on obtient $\frac{\pi}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}$.

Pour $t = \pi$, on obtient $\pi \cot g(\pi a) = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}$.

II.2.3. D'après II.1.4. $\beta(a, 1-a) = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} = I_{a, 1-a}$.

II.3.1. $\Psi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Log} \left(1 - \frac{a^2}{n^2} \right)$. On pose $k_n(a) = \text{Log} \left(1 - \frac{a^2}{n^2} \right)$.

k_n est C^1 sur $]0, 1[$ et $k_n'(a) = \frac{2a}{a^2 - n^2}$.

$|k_n'(a)| \leq \frac{2}{n^2 - 1}$ terme général d'une série convergente donc $\sum k_n'$

converge normalement sur $]0, 1[$, d'où Ψ est de classe C^1 sur $]0, 1[$

et $\Psi'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2} = \pi \cot g(\pi a) - \frac{1}{a}$.

II.3.2. $\Psi(a) = -\text{Log} \left(\frac{a}{\sin(\pi a)} \right) + c$. Quand a tend vers 0, on trouve $c = -\text{Log}(\pi)$.

$\Psi(a) = -\text{Log} \left(a I_{a, 1-a} \right)$.

Partie III

III.1.1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ qui est alors stable par φ .

III.1.2. La matrice de φ_n dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\alpha & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2\alpha & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & k(k+1) & -n(n-1) \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & -2\alpha \\ 0 & & & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\text{Sp}\{\varphi_n\} = \{k(k+1), k = 0, 1, \dots, n\}$.

III.1.3. φ_n est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Les sous espaces propres sont alors des droites vectorielles, ce qui assure l'existence et l'unicité de la base de vecteurs propres (P_1, P_2, \dots, P_n) telle que P_1, P_2, \dots, P_n soient de coefficient dominant 1.

Pour $k = 1, 2, \dots, n$, on note r_k le degré de P_k .

Le coefficient de X^k dans $\varphi(P_k) = k(k+1)P_k$ est $r_k(r_k-1) + 2r_k = k(k+1)$

ce qui montre que $r_k^2 - r_k = k^2 - k$ et par suite $r_k = k$.

III.1.4. $P_0 = 1$ et $P_1 = X - \alpha$.

III.1.5. Le coefficient de X^{k-1} dans $\varphi(P_k) = k(k+1)P_k$ est $(k-1)(k-2)a_k + 2[(k-1)a_k - \alpha k] = k(k+1)a_k$ et donc $a_k = -\alpha$.

III.2.1. $\frac{d^k}{dx^k} [(1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha}] = \sum_{r=0}^k C_k^r (-1)^{k-r} v_k (1+x)^{n+\alpha-r} (1-x)^{n-\alpha-k+r}$,

où, $v_k = (n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(n+\alpha-r+1)(n-\alpha)(n-\alpha-1)\dots(n-\alpha-k+r+1)$.

Mais, $n+\alpha-r \geq \alpha+1 > 0$ et $n-\alpha-k+r \geq 1-\alpha > 0$, d'où le résultat.

III.2.2.

$$\begin{aligned} (P_n/Q) &= \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha}] Q^{(k-1)}(x) \right\}_{-1}^1 + (-1)^n \int_{-1}^1 (1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha} Q^{(n)}(x) dx \\ &= \frac{n!}{(2n)!} \int_{-1}^1 (1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha} Q^{(n)}(x) dx \end{aligned}$$

III.2.3. Soit k et m deux entiers naturels distincts. On suppose par exemple que $k > m$.

D'après la question précédente, $(P_k/P_m) = \frac{k!}{(2k)!} \int_{-1}^1 (1+x)^{k+\alpha} (1-x)^{k-\alpha} P_m^{(k)}(x) dx = 0$

car P_m est de degré $m < k$.

Ainsi, la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

$$\begin{aligned} \text{III.2.4. } \|P_n\|^2 &= \frac{n!}{(2n)!} \int_{-1}^1 (1+x)^{n+\alpha} (1-x)^{n-\alpha} P_n^{(n)}(x) dx \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^1 (1+x)^{n+\alpha} (1-x)^{n-\alpha} dx = \frac{(n!)^2}{(2n)!} I_{n+\alpha+1, n-\alpha+1} \end{aligned}$$

car P_n est de degré n et de coefficient dominant 1.

III.3.1. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$(P_{n+2} - XP_{n+1}/Q) = (P_{n+2}/Q) - (P_{n+1}/XQ) = 0.$$

III.3.2. On a $\deg(P_{n+2} - XP_{n+1}) \leq n+2$, coefficient de X^{n+2} est nul et coefficient de X^{n+1}

est $a_{n+2} - a_{n+1} = 0$, alors $\deg(P_{n+2} - XP_{n+1}) \leq n$. Comme (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, alors il existe un réel γ_{n+1} et un polynôme Q de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que $P_{n+2} - XP_{n+1} = -\gamma_{n+1}P_n + Q$.

Q étant orthogonal à P_n et à $P_{n+2} - XP_{n+1}$, il est orthogonal à lui-même et est donc nul.

Ainsi $P_{n+2} = XP_{n+1} - \gamma_{n+1}P_n$.

$$\text{III.3.3. } (P_{n+2}/P_n) = (P_{n+1}/XP_n) - \gamma_{n+1} \|P_n\|^2.$$

Or, $XP_n = P_{n+1} + Q$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, d'où $(P_{n+1}/XP_n) = \|P_{n+1}\|^2$,

$$\text{et par suite } \gamma_{n+1} = \frac{\|P_{n+1}\|^2}{\|P_n\|^2}.$$

III.3.4. En utilisant les questions III.2.4. et III.3.3., on obtient $\gamma_{n+1} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \frac{I_{n+\alpha+2, n-\alpha+2}}{I_{n+\alpha+1, n-\alpha+1}}$.

La question I.3.5. montre que $\frac{I_{n+\alpha+2, n-\alpha+2}}{I_{n+\alpha+1, n-\alpha+1}} = \frac{2(n+\alpha+1)(n-\alpha+1)}{(n+1)(2n+3)}$.

$$\text{Ainsi, } \gamma_{n+1} = -\frac{(n+\alpha+1)(n-\alpha+1)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

III.4.1. Il est clair que $L_0 = 1$ et $L_1 = X$.

Pour $\alpha = 0$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} P_n$. D'où :

$$L_{n+2} = \frac{(2n+4)(2n+3)}{2(n+2)^2} L_{n+1} - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \frac{(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{4(n+2)^2(n+1)^2} L_n.$$

$$\text{Ainsi, } L_{n+2} = \frac{(2n+3)}{(n+2)} L_{n+1} - \frac{(n+1)}{(n+2)} L_n.$$

$$\text{III.4.2. } \|L_n\|^2 = \left[\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \right]^2 \|P_n\|^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} I_{n+1, n+1}.$$

La question I.3.6. montre que $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.

PARTIE IV

IV.1. L'expression $\left\| f - \sum_{k=0}^n c_k L_k \right\|^2$ est minimale, si et seulement si, $\sum_{k=0}^n c_k L_k$ est le projeté

orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire $c_k = \frac{(f/L_k)}{\|L_k\|^2}$, $k = 1, 2, \dots, n$,

$\left(\frac{L_0}{\|L_0\|}, \frac{L_1}{\|L_1\|}, \dots, \frac{L_n}{\|L_n\|} \right)$ étant une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

IV.2.1. Comme $f - \sum_{k=0}^n c_k L_k$ est orthogonal à $\sum_{k=0}^n c_k L_k$, par le théorème de Pythagore

$$\text{on obtient } \|f\|^2 = \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k L_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=0}^n c_k L_k \right\|^2.$$

$$\text{Or, } \left\| \sum_{k=0}^n c_k L_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n \frac{(f/L_k)^2}{\|L_k\|^2}, \text{ on en déduit que } \sum_{k=0}^n \frac{(f/L_k)^2}{\|L_k\|^2} \leq \|f\|^2$$

et que la série de terme général $\frac{(f/L_k)^2}{\|L_k\|^2}$ est convergente.

IV.2.2. Comme la série de terme général $\frac{(f/L_k)^2}{\|L_k\|^2}$ est convergente alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(f/L_k)}{\|L_k\|} = 0$.

Par ailleurs, et d'après III.4.2. $\|L_k\| = \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$, on en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{k}(f/L_k) = 0$.

IV.3.1. L'égalité est vraie pour $n=0$.

Pour $n \geq 1$, en appliquant III.4.2. à l'entier $n-1$, on obtient le résultat.

IV.3.2. D'après la question précédente, on a

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)x L_k(x) = \frac{1}{2}((k+1)L_{k+1}(x) + kL_{k-1}(x)) \quad (1)$$

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)y L_k(y) = \frac{1}{2}((k+1)L_{k+1}(y) + kL_{k-1}(y)) \quad (2).$$

(1) $L_k(y)$ - (2) $L_k(x)$ donne

$$(x-y)\left(k + \frac{1}{2}\right)L_k(x)L_k(y) = \frac{1}{2}((k+1)L_{k+1}(x)L_k(y) - kL_k(x)L_{k-1}(y)) - \frac{1}{2}((k+1)L_{k+1}(y)L_k(x) - kL_k(y)L_{k-1}(x))$$

En passant à la somme, on obtient l'égalité.

IV.3.3. On a $H_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{1}{2}\right)L_k(x)L_k(y)$, ce qui prouve que H_n se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned} \text{IV.3.4. } S_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{1}{2}\right)L_k(x) \int_{-1}^1 f(t)L_k(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 f(t) \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{1}{2}\right)L_k(t)L_k(x)dt = \int_{-1}^1 f(t)H_n(x, t)dt \end{aligned}$$

Lorsque f est constante égale à 1, l'égalité devient $\int_{-1}^1 H_n(x, t)dt = 1$.

$$\begin{aligned} \text{IV.4.1. } S_n(f)(x) - f(x) &= \int_{-1}^1 (f(t) - f(x))H_n(x, t)dt \\ &= \int_{-1}^1 g(t)(t-x)H_n(x, t)dt \\ &= \frac{n+1}{2} \int_{-1}^1 g(t)[L_n(x)L_{n+1}(t) - L_{n+1}(x)L_n(t)]dt \\ &= \frac{n+1}{2} [(L_{n+1}/g)L_n(x) - (L_n/g)L_{n+1}(x)] \end{aligned}$$

IV.4.2.

$$\begin{aligned}
 |S_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{n+1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi(1-x^2)}} \left[\frac{|(L_{n+1}/g)|}{\sqrt{n}} + \frac{|(L_n/g)|}{\sqrt{n+1}} \right] \\
 &\leq \sqrt{\frac{n+1}{n}} \sqrt{\frac{1}{2\pi(1-x^2)}} \left[\sqrt{n+1}|(L_{n+1}/g)| + \sqrt{n}|(L_n/g)| \right]
 \end{aligned}$$

La question IV.2.2. permet alors de conclure.