REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2007

Concours Physique Chimie

Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 H **Date** : 04 Juin 2007 **Heure** : 8 H **Nb pages** : 4

Barème : P I : 4.5 pts. P II : 4.5 pts. P III : 6 pts. P IV : 5 pts.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Partie I

On note $I_{a,b} = \int_{-1}^{1} (1+x)^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

I.1. Discuter, suivant les valeurs de a et b, l'existence de $I_{a,b}$.

I.2. Montrer que $I_{a,b} = 2^{a+b-1}\beta(a,b)$, où β est l'application définie pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ par $\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$.

I.3. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

I.3.1. Comparer $\beta(a,b)$ et $\beta(b,a)$.

I.3.2. Montrer que $\beta(a+1,b) + \beta(a,b+1) = \beta(a,b)$.

I.3.3. Montrer que $b\beta(a+1,b) - a\beta(a,b+1) = 0$.

I.3.4. Montrer que $\beta(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b}\beta(a,b)$.

I.3.5. Montrer que $I_{a+1,b+1} = \dfrac{4ab}{(a+b)(a+b+1)} I_{a,b}$.

I.3.6. En déduire $I_{n+1,n+1}$ pour tout entier naturel n.

I.4. On considère la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}dt$.

I.4.1. Montrer que $\Gamma(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^a \beta(a,n+1)$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

I.4.2. Montrer que $\Gamma(b) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^b \beta(a+n+1,b)$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

I.4.3. En déduire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

I.4.4. En déduire que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Partie II

On suppose que $a \in]0,1[$.

II.1.1. Montrer que $\beta(a,1-a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1-a}(1+u)}$.

II.1.2. Montrer que $\beta(a,1-a) = J(a) + J(1-a)$ où $J(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^{1-a}(1+u)}$.

II.1.3. A l'aide d'un développement de $\dfrac{1}{1+u}$, exprimer $J(a)$ comme somme d'une série convergente.

II.1.4. Montrer que $\beta(a,1-a) = \dfrac{1}{a} + 2a \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2-n^2}$.

II.2. On considère la fonction f_a, 2π-périodique telle que $f_a(t) = \cos(at)$, $t \in [-\pi, \pi]$.

II.2.1. Déterminer la série de Fourier de f_a et étudier sa convergence.

II.2.2. En déduire que

$$\frac{\pi}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2-n^2} \quad \text{et} \quad \pi \cot g(\pi a) = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2-n^2}.$$

II.2.3. Montrer que $I_{a,1-a} = \dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}$.

II.3. On pose $\Psi(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)$.

II.3.1. Montrer que Ψ est de classe C^1 sur $]0,1[$ et calculer $\Psi'(a)$.

II.3.2. En déduire que $\Psi(a) = -\mathrm{Log}\left(a\, I_{a,1-a}\right)$.

Dans la suite, on désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n, $n \in \mathbb{N}$.
On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit E du produit scalaire défini pour tout f et g de E par $(f/g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\alpha} f(t)g(t)dt$, α étant un réel compris strictement entre -1 et 1. On note $\| \ \|$ la norme associée.

PARTIE III

On note φ l'endomorphisme de IR [X] défini pour tout élément P de IR [X] par

$$\varphi(P) = \left(X^2 - 1\right)P'' + 2(X - \alpha)P'.$$

Soit n un entier naturel.

III.1.1. Montrer que φ induit par restriction un endomorphisme de $IR_n[X]$ qu'on notera φ_n.

III.1.2. Ecrire la matrice de φ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots X^n)$ de $IR_n[X]$ et déterminer les valeurs propres de φ_n.

III.1.3. Prouver que φ_n est diagonalisable et qu'il existe une unique base de vecteurs propres $(P_0, P_1, \ldots P_n)$ de φ_n telle que pour tout $k = 0, 1, \ldots n$, P_k est de degré k et a pour coefficient dominant 1.

III.1.4. Calculer P_0 et P_1.

III.1.5. Pour $n \geq 2$ et $k = 2, \cdots, n$, on note a_k le coefficient de X^{k-1} dans P_k.
Montrer que $a_k = -\alpha$.

On utilisera sans démonstration le fait que $P_n = \dfrac{(-1)^n n!}{(2n)!}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\alpha}\dfrac{d^n}{dx^n}\left[(1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha}\right]$.

III.2.1. En appliquant la formule de Leibnitz, montrer que pour tout $k = 0, 1, \ldots n-1$, $\dfrac{d^k}{dx^k}\left[(1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha}\right]$ s'annule en 1 et en -1.

III.2.2. A l'aide de n intégrations par parties, montrer que pour tout polynôme Q de IR [X]

$$(P_n / Q) = \frac{n!}{(2n)!}\int_{-1}^{1}(1+x)^{n+\alpha}(1-x)^{n-\alpha}Q^{(n)}(x)\,dx.$$

III.2.3. En déduire que la famille $(P_k)_{k\in IN}$ est orthogonale.

III.2.4. Montrer que $\|P_n\|^2 = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} I_{n+\alpha+1, n-\alpha+1}$.

III.3.1. Montrer que pour n non nul, $P_{n+2} - XP_{n+1}$ est orthogonal à $IR_{n-1}[X]$.

III.3.2. En déduire qu'il existe un réel γ_{n+1} tel que $P_{n+2} = XP_{n+1} - \gamma_{n+1}P_n$.

III.3.3. Montrer que $\gamma_{n+1} = \dfrac{\|P_{n+1}\|^2}{\|P_n\|^2}$.

III.3.4. Montrer que $P_{n+2} = XP_{n+1} - \dfrac{(n+\alpha+1)(n-\alpha+1)}{(2n+1)(2n+3)}P_n$.

III.4. Pour $\alpha = 0$, on note $L_n = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}P_n$.

III.4.1. Montrer que $L_0 = 1$, $L_1 = X$ et $L_{n+2} = \dfrac{2n+3}{n+2}XL_{n+1} - \dfrac{n+1}{n+2}L_n$.

III.4.2. Montrer que $\|L_n\| = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$.

PARTIE IV

Soit f un élément de E et n un entier naturel.

IV.1. Montrer qu'il existe une unique suite de réels $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, telle que l'expression

$$\left\| f-\sum_{k=0}^{n} c_k L_k \right\|^2 \text{ soit minimale.}$$

IV.2.1. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(f/L_k)^2}{\|L_k\|^2} \leq \|f\|^2$ et que la série de terme général $\dfrac{(f/L_k)^2}{\|L_k\|^2}$ est convergente .

IV.2.2. Prouver que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \sqrt{k}\,(f/L_k) = 0.$

IV.3.1. En utilisant III.4.1. , montrer que pour tout réel x

$$(n+\frac{1}{2})xL_n(x)=\frac{1}{2}\big((n+1)L_{n+1}(x)+nL_{n-1}(x)\big),$$ avec la convention $L_{-1}=0$.

IV.3.2. En déduire que pour tous réels distincts x , y

$$\sum_{k=0}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)L_k(x)L_k(y) = \frac{n+1}{2}\,\frac{L_{n+1}(x)L_n(y)-L_n(x)L_{n+1}(y)}{x-y}.$$

IV.3.3. On note $H_n(x,y) = \dfrac{n+1}{2}\,\dfrac{L_{n+1}(x)L_n(y)-L_n(x)L_{n+1}(y)}{x-y}.$

Vérifier que la fonction H_n se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

IV.3.4. On note $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(f/L_k)}{\|L_k\|^2} L_k.$

Etablir pour tout x élément de $]-1,1[$, l'égalité $\displaystyle\int_{-1}^{1} H_n(x,t)\,f(t)\,dt = S_n(f)(x)$.

Que devient cette égalité lorsque f est la fonction constante égale à 1 ?

IV.4. On suppose dans cette question que la fonction f est de classe C^1 sur $[-1, 1]$.

IV.4.1. Montrer que pour tout x élément de $]-1,1[$

$$S_n(f)(x)-f(x) = \frac{n+1}{2}\big[(L_{n+1}/g)L_n(x) - (L_n/g)L_{n+1}(x)\big],$$

où g est la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} & \text{si } t\neq x, \\ f'(x) & \text{si } t=x. \end{cases}$

IV.4.2. Prouver que, pour $x\in\,]-1,1[$, la suite $(S_n(f)(x))$ converge vers $f(x)$.

(On admettra que pour tout x appartenant à $]-1, 1[$, $|L_n(x)|\leq\sqrt{\dfrac{2}{\pi n(1-x^2)}}$).